Libros de Cátedra

Ecuaciones diferenciales parciales

Claudia Marcela Giordano

e
exactas

FACULTAD DE
CIENCIAS ASTRONÓMICAS Y GEOFÍSICAS

Editorial
de la Universidad
de La Plata

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA

Ecuaciones Diferenciales Parciales

Claudia Marcela Giordano

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

edulp
Editorial de la Universidad de La Plata

A mi madre y a mis amores, Candela y Lucas.

Agradecimientos

Deseo manifestar mi profundo agradecimiento a mis profesores, muy especialmente a la Lic. Beatriz N. Ruiz, a mis colegas y alumnos de la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de La Plata, quienes con sus enseñanzas, preguntas y sugerencias enriquecieron el contenido de esta obra. Agradezco también a la Universidad Nacional de La Plata, al Instituto de Astrofísica de La Plata y al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas por brindarme la Infratructura y el apoyo financiero para la concreción, entre otros, de este proyecto.

El lenguaje para entender a la
naturaleza es la matemática.

Galileo Galilei

Prefacio

Modelar un problema de la vida real desde el punto de vista matemático en el que intervengan dos o más variables independientes conduce a las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (EDP). La aparición de varias variables independientes hace que este tema resulte mucho más complejo que el de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO): la teoría de EDP es evidentemente una generalización y extensión de la teoría de EDO. Al abordar el estudio de EDP necesitamos desarrollar conceptos como el de superficie característica, distinguir las clases de soluciones, analizar cuidadosamente la dependencia (regularidad) de las soluciones con respecto a la variable espacial, necesidades que no se presentan en el marco de la teoría de EDO.

La forma en la que las EDP se presentan habitualmente en la modelización de fenómenos de la Ciencia y Tecnología es la de modelos de evolución de determinada cantidad o variable (también a veces denominada estado) que puede representar fenómenos de lo más diversos.

En la teoría clásica de EDP de segundo orden éstas se clasifican en tres grandes grupos: elípticas, parabólicas e hiperbólicas. El modelo elíptico por excelencia involucra el operador de Laplace. La variable tiempo está ausente en este modelo. Es por eso que sólo permite describir estados estacionarios o de equilibrio. Las ecuaciones parabólicas y las hiperbólicas, representadas respectivamente por la ecuación del calor y la de ondas, son los modelos más clásicos y representativos en el contexto de las EDP de evolución. Sus características matemáticas son bien distintas. Mientras que la ecuación del calor permite describir fenómenos altamente irreversibles en el tiempo en los que la información se propaga a velocidad infinita, la ecuación de ondas es el prototipo de modelo de propagación a velocidad finita y completamente reversible en el tiempo.

El operador del calor y de ondas se distinguen también por sus ámbitos de aplicación. Mientras que el primero es habitual en la dinámica de fluídos (a través de una versión más sofisticada, el operador de Stokes) o en fenómenos de difusión (del calor, de contaminantes, etc.) el operador de ondas y sus variantes intervienen en forma sistemática en elasticidad (frecuentemente a través de sistemas más sofisticados, como el de Lamé, por ejemplo) o en la propagación de ondas acústicas o electromagnéticas (ecuaciones de Maxwell). La mecánica de medios continuos está repleta también de otras ecuaciones, operadores y modelos, pero en todos ellos, de una u otra manera, encontraremos

siempre el operador del calor, de ondas o una variante muy próxima de los mismos.
Frecuentemente los modelos más realistas son más sofisticados que una simple ecuación aislada. Se trata a menudo de sistemas acoplados de EDP en los que es habitual encontrar tanto componentes parabólicas como hiperbólicas. Es el caso por ejemplo de las ecuaciones de la termoelasticidad. En estos casos, si bien un buen conocimiento de los aspectos más relevantes de la ecuación del calor y de ondas aisladamente puede no ser suficiente a causa de las interacciones de los diferentes componentes, resulta indispensable para entender el comportamiento global del sistema.
Hasta ahora nos hemos referido sólo a las ecuaciones del calor y de ondas en su expresión más sencilla: con coeficientes constantes. Estas ecuaciones, cuando modelizan fenómenos en medios heterogéneos (compuestos por materiales de diversa naturaleza) adoptan formas más complejas y se presentan con coeficientes variables, dependientes de la variable espacial, de la variable temporal o de ambas, quedando fuera de los objetivos de este texto pero, se puede asegurar que los elementos que aquí expondremos serán sin duda de gran utilidad, si no indispensables, a la hora de adentrarse en otros modelos más complejos, incluso aquéllos que involucren términos no-lineales y estocásticos.
El texto reúne los contenidos del curso semestral Ecuaciones Diferenciales Parciales que se dicta desde agosto de 2002 en la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la UNLP para alumnos avanzados. Se requiere por parte del lector de una formación básica sobre Análisis Matemático en una y varias variables reales y en variable compleja, así como sobre Álgebra y Álgebra Lineal. Se halla organizado en ocho capítulos, y seis apéndices que incluyen material complementario.
En estas notas desarrollaremos parte de lo que es una teoría general y clásica de EDP. El capítulo **1** desarrolla la teoría de integración de las ecuaciones generales de primer orden, presentando el método de las características para la obtención de soluciones generales, introduce los distintos tipos de soluciones o superficies integrales y trata la resolución de un problema de valor inicial o problema de Cauchy, discutiendo las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una solución única. El capítulo **2** aborda la clasificación y reducción a sus formas normales de las EDP de segundo orden. El capítulo **3** se dedica al estudio con cierto detalle de la ecuación de ondas en una dimensión espacial, paradigma de las ecuaciones lineales hiperbólicas. El estudio de procesos de conductividad térmica o difusión en una dimensión espacial descriptos por el arquetipo de las ecuaciones lineales parabólicas se incluye en el capítulo **4**. La teoría relativa a la ecuación de Laplace y los problemas de contorno a ella asociados se abordan en el capítulo **5**, brindando una detallada descripción de las condiciones necesarias para que los problemas sean "bien planteados"; también se presentan interesantes propiedades de las funciones armónicas de frecuente aparición en el planteo matemático de problemas de la física. Las ecuaciones hiperbólicas y parabólicas en más de una dimensión espacial se estudian en los capítulos **6** y **7**. El capítulo **8** presenta la teoría de

los potenciales de volumen y de superficie, de doble y simple capa, y su aplicación al tratamiento de problemas de contorno para las ecuaciones de Laplace, Poisson y la ecuación de Helmholtz mediante la resolución de ecuaciones integrales.

Los apéndices **A**, **B** y **D** cubren tópicos que resultan auxiliares para el abordaje de los problemas de contorno objeto de estudio de modo que el texto sea autocontenido. El método de separación de variables tratado en **C** constituye un tema importante que nos conducirá a los problemas de Sturm-Liouville y sus autovalores, resultados que se aplican en varios de los problemas resueltos y se describen en el apéndice **E** . Finalmente, el apéndice **F** brinda una introducción a los métodos de resolución de ecuaciones integrales.

El libro contiene numerosos ejemplos resueltos, con el propósito de consolidar la comprensión de los tópicos abordados, y también un buen número de problemas propuestos, con sus soluciones respectivas, destinados a desarrollar en el lector la habilidad de resolverlos y el dominio de las estructuras matemáticas a ellos asociados.

Índice general

1 EDP de primer orden **13**
1.1 Ecuaciones diferenciales parciales de primer orden con dos variables independientes . . . 13
1.2 Integración de ecuaciones lineales . . . 14
1.3 Ecuaciones cuasi-lineales de primer orden . . . 20
1.4 Ecuaciones generales de primer orden . . . 26
1.5 Caso de n variables independientes . . . 38
1.6 Distintos tipos de soluciones de una EDP . . . 39
1.7 Métodos para la obtención de una solución completa . . . 42
1.8 Problemas propuestos . . . 54

2 EDP lineales de segundo orden **72**
2.1 EDP con coeficientes constantes . . . 72
2.1.1 Clasificación y formas canónicas . . . 72
2.1.2 Forma canónica alternativa para las ecuaciones hiperbólicas . . . 77
2.1.3 Formas canónicas simplificadas . . . 77
2.2 EDP con coeficientes variables . . . 79
2.3 Solución general para EDP hiperbólicas . . . 82
2.4 EDP con n variables independientes . . . 84
2.5 Problemas propuestos . . . 88

3 Ecuaciones hiperbólicas en una dimensión **93**
3.1 Ecuación homogénea en la recta . . . 93
3.2 Ecuación no homogénea en la recta . . . 101
3.3 Problema bien planteado . . . 102
3.4 Ecuación homogénea en la semirrecta . . . 104
3.4.1 1° problema de contorno con extremo fijo . . . 105
3.4.2 2° problema de contorno con extremo libre . . . 105
3.4.3 1° problema general de contorno . . . 110
3.4.4 2° problema general de contorno . . . 110
3.5 Ecuación inhomogénea en la semirrecta . . . 111
3.5.1 1° problema de contorno con extremo fijo y condiciones iniciales homogéneas . . . 112

3.5.2 2 °Problema de contorno con extremo libre y condiciones iniciales homogéneas 113
3.5.3 1 °Problema de contorno para la semirrecta 114
3.5.4 2 °Problema de contorno para la semirrecta 114
3.6 Ecuación homogénea en el segmento 115
3.6.1 Extremos fijos 115
3.6.2 Extremo $x = 0$ variable 117
3.6.3 Extremo $x = l$ variable 118
3.6.4 Problema general 119
3.6.5 Unicidad de la solución 119
3.7 Ecuación no homogénea en el segmento 120
3.7.1 Extremos fijos 120
3.7.2 Problema general 122
3.7.3 Fuerza externa estacionaria 123
3.8 Ecuaciones lineales hiperbólicas generales 124
3.8.1 Problema de Goursat 125
3.8.2 Método de Riemann 128
3.9 Problemas propuestos 134

4 Ecuaciones parabólicas en una dimensión **140**
4.1 Definición de solución de un problema de contorno 140
4.2 1 °Problema de contorno: unicidad y estabilidad 141
4.3 1 °Problema de contorno en la barra finita 143
4.4 Propagación del calor en la barra infinita. 147
4.5 1° Problema de contorno en la barra semi-infinita 151
4.6 2° Problema de contorno en la barra semi-infinita 156
4.7 Función de Green 158
4.8 Problemas propuestos 160

5 Ecuaciones de tipo elíptico **160**
5.1 Soluciones particulares de la ecuación de Laplace 164
5.2 Fórmulas de Green 165
5.3 Propiedades de las funciones armónicas 170
5.4 Problemas de contorno. Unicidad y estabilidad 171
5.5 1° Problema de contorno en el círculo. 176
5.6 Funciones de Green 179
5.7 1° Problema de contorno para la esfera 181
5.8 Problema de contorno para un semiespacio 184
5.9 Ecuación general con coeficientes constantes 185
5.10 Problemas propuestos 189

6 Ecuaciones hiperbólicas en $\mathbb{R}^3$ y en $\mathbb{R}^2$ **196**
6.1 Problema de Cauchy en el espacio 196
6.2 Método del descenso 200
6.3 Método de la transformada de Fourier 202
6.4 Método de reflexión 204

6.5 Fórmula de Kirchhoff 205
6.6 Corolarios de la fórmula de Kirchhoff. 207
6.7 Separación de variables en regiones acotadas 210
6.8 Problemas propuestos 215

7 Ecuaciones parabólicas en $\mathbb{R}^3$ 219
7.1 Función de Green 219
7.2 Propagación del calor en $\mathbb{R}^3$ 222
7.3 Propagación del calor en regiones acotadas 223
7.4 Propagación del calor en un semiespacio 223
7.5 Método de separación de variables 224
7.6 Problemas propuestos 226

8 Teoría de potencial 228
8.1 Potencial de volumen y potencial logarítmico 228
8.1.1 Definiciones 228
8.1.2 Derivadas del potencial 229
8.1.3 Ecuación de Poisson asociada a un potencial 232
8.1.4 Aplicación del potencial de volumen a la resolución de problemas de contorno 233
8.2 Potenciales de superficie y de línea 234
8.3 Resolución de problemas de contorno 241
8.4 Potenciales para la ecuación de Helmholtz 245
8.5 Problemas propuestos 248

Apéndices 253

Apéndice A Integrales impropias 253
A.1 Integrales impropias en $\mathbb{R}^1$ 253
A.2 Integrales impropias en $\mathbb{R}^3$ 256
A.3 Integrales dependientes de un parámetro 258

Apéndice B Serie y transformada de Fourier 260
B.1 Funciones ortogonales 260
B.2 Series de Fourier 261
B.3 Transformada de Fourier 266
B.4 Transformada de Hankel 269

Apéndice C Método de separación de variables 270
C.1 Principio de superposición 270
C.2 Separación de variables 271

Apéndice D Transformada de Laplace 274
D.1 Definición y propiedades 274

Apéndice E Funciones especiales 279
E.1 Ecuaciones diferenciales asociadas a funciones especiales . . . 279
E.2 Funciones cilíndricas 281
E.3 Funciones esféricas 286
E.3.1 Polinomios de Legendre 286
E.3.2 Funciones adjuntas de Legendre 289
E.3.3 Polinomios armónicos y funciones esféricas 290
E.4 Problemas propuestos 293

Apéndice F Ecuaciones integrales 297
F.1 Ecuaciones integrales de 1° y 2° especie **297**

Bibliografía **307**
La autora **310**

Capítulo 1

Ecuaciones diferenciales parciales de primer orden

1.1 Ecuaciones diferenciales parciales de primer orden con dos variables independientes

El estudio de las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) de primer orden se inició en la segunda mitad del siglo XVIII a raíz de los trabajos de Clairaut, Lagrange, Charpit, Monge y Cauchy en el campo de la Geometría y de la Óptica Geométrica. Estas ecuaciones admiten interesantes interpretaciones geométricas. Por esta razón estudiaremos el caso correspondiente a dos variables independientes, x, y, pero advirtiendo que el formalismo teórico se puede extender en forma inmediata a cualquier número de variables independientes. Consideremos ecuaciones para la función incógnita u de la forma general

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \tag{1.1}$$

donde

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1.2}$$

El conjunto de soluciones de una EDP es una familia de superficies en el espacio de tres dimensiones. El problema de hallar aquella superficie $u = u(x, y)$ que pase por una curva dada, llamada *curva inicial o condición inicial*, se conoce con el nombre de *problema de valor inicial o problema de Cauchy*.
Estudiaremos en primer término las EDP lineales, cuya forma general es

$$a(x, y)\, u_x + b(x, y)\, u_y + c(x, y)\, u + d(x, y) = 0, \tag{1.3}$$

donde a, b, c y d son funciones dadas.
Antes de abordar el problema de su integración, analizaremos algunos ejemplos sencillos.

- Al integrar la EDP $u_x = 0$ se obtiene la solución $u(x, y) = \phi(y)$, con ϕ función arbitraria.

- Para la EDP $u_x = u_y$, el cambio de variables

$$x + y = \xi, \quad x - y = \eta, \tag{1.4}$$

conduce a

$$u(x, y) = u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}\right) = v(\xi, \eta). \tag{1.5}$$

La EDP se transforma entonces en

$$v_\eta = 0, \tag{1.6}$$

cuya solución, $v = \phi(\xi)$, en términos de las variables originales es

$$u(x, y) = \phi(x + y), \tag{1.7}$$

siendo ϕ una función arbitraria.

Una solución que depende de una función ϕ arbitraria, tal como se obtuvo en los ejemplos anteriores, se denomina *solución general*.

1.2 Integración de ecuaciones lineales

Movimiento ondulatorio unidireccional

La EDP que describe el movimiento ondulatorio unidireccional es

$$u_t + c\, u_x = 0, \tag{1.8}$$

donde la velocidad de propagación c es una constante. Consideremos además la condición inicial

$$u(x, 0) = f(x), \tag{1.9}$$

siendo f una función conocida.

La ecuación (1.8) representa la derivada de u en la dirección s dada por

$$\frac{dt}{ds} = 1, \qquad \frac{dx}{ds} = c \tag{1.10}$$

o bien,

$$\frac{dx}{dt} = c. \tag{1.11}$$

El sistema de ecuaciones (1.10) determina una familia de curvas en el plano (x, t),

$$t = t(s), \quad x = x(s),$$

cuya tangente es $1/c$.
A lo largo de estas curvas la función $u = u(x,t)$ es $u = u(x(s), t(s))$, y verifica

$$\frac{du}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} + u_t \frac{dt}{ds} = cu_x + u_t = 0. \tag{1.12}$$

De (1.11) se obtiene la familia de curvas - en este caso rectas - en el plano de las fases (x, t), descriptas por la ecuación

$$x = ct + k, \tag{1.13}$$

y de (1.12) resulta

$$u = K, \tag{1.14}$$

con K constante (relativa) sobre cada recta (1.13), es decir,

$$u = K(k). \tag{1.15}$$

Una solución general es entonces

$$u = K(x - ct), \tag{1.16}$$

y el problema queda resuelto determinando K mediante la condición inicial:

$$u(x, 0) = f(x) = K(x), \tag{1.17}$$

de donde se obtiene

$$u(x,t) = f(x - ct). \tag{1.18}$$

Si f es derivable, entonces (1.18) es solución del problema (1.8)-(1.9).

En la figura 1.1 se muestra la superficie solución generada al propagarse la perturbación inicial $f(x)$ a lo largo de cada recta $x - ct = cte$, con velocidad $dx/dt = c$.

El problema (1.8)-(1.9) también puede resolverse trabajando con el parámetro s. En efecto, de (1.10) se obtienen

$$x = cs + k_1, \qquad t = s + k_2, \tag{1.19}$$

y de (1.12) se ve que sobre estas curvas es

$$u = k_3. \tag{1.20}$$

Parametrizando la condición inicial

$$x(\tau) = \tau, \quad t(\tau) = 0, \quad u(\tau) = f(\tau), \tag{1.21}$$

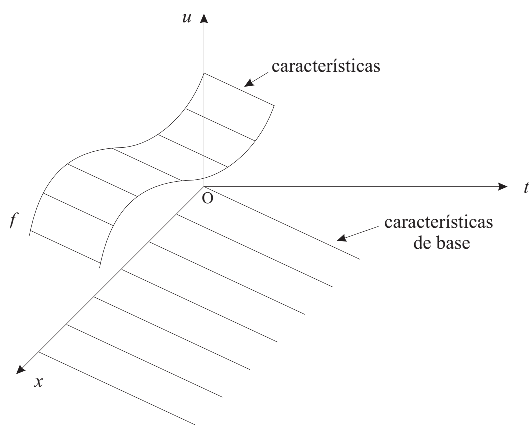


Figura 1.1: Superficie $u(x, y)$ generada al propagarse la perturbación inicial $f(x)$ a lo largo de cada recta $x - ct = cte$ con velocidad $dx/dt = c$.

y, con la convención de que para $s = 0$ (1.19) y (1.20) determinan la curva inicial, se obtiene la superficie

$$x = cs + \tau, \quad t = s, \quad u = f(\tau). \tag{1.22}$$

y eliminando los parámetros s y τ en (1.22) resulta nuevamente (1.18).

Método de las características

El término de la izquierda de la EDP lineal

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y)u + d(x, y) \tag{1.23}$$

representa la derivada de u en la dirección

$$\frac{b(x, y)}{a(x, y)} \tag{1.24}$$

en los puntos en los cuales no son simultáneamente nulos los coeficientes $a(x, y)$ y $b(x, y)$.

Si se consideran en el plano (x, y) las curvas definidas por las ecuaciones $x = x(s), y = y(s)$, cuyas tangentes tienen la dirección (1.24), de modo que

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y), \qquad \frac{dy}{ds} = b(x, y), \tag{1.25}$$

o bien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}, \tag{1.26}$$

a lo largo de estas curvas es $u = u(x(s), y(s))$ (ó $u = u(x, y(x))$, y

$$\frac{du}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} + u_y \frac{dy}{ds} = u_x a(x,y) + u_y b(x,y) = c(x,y)u + d(x,y), \tag{1.27}$$

o bien

$$\frac{du}{dx} = u_x + \frac{b(x,y)}{a(x,y)} u_y = \frac{c(x,y)u + d(x,y)}{a(x,y)}. \tag{1.28}$$

La familia monoparamétrica de curvas definidas por (1.25) (ó (1.26)) determina las *curvas características de base*, sobre las cuales se hallan, por (1.27) (ó (1.28)), las *curvas características*.
Las curvas características proveen la solución general de (1.23), la cual existe si admite solución el sistema característico formado por (1.25) y (1.27) (ó (1.26) y (1.28)), es decir

$$\frac{dx}{a(x,y)} = \frac{dy}{b(x,y)} = \frac{du}{c(x,y)u + d(x,y)}. \tag{1.29}$$

Si las soluciones del sistema característico (1.29) son $f(x,y) = c$ (características de base) y $g(x,y,u) = k$, entonces cualquier función arbitraria $\Phi(f,g) = 0$ será solución general de la ecuación (1.23). En efecto, Φ satisface la ecuación diferencial parcial, tal como puede verificarse derivando Φ respecto de x y de y, despejando u_x y u_y, reemplazando en (1.23) y teniendo en cuenta que $d\Phi = 0$.
Supongamos ahora que a $\phi(x,y,u) = 0$, solución general de (1.23), se le asigna un valor "inicial" en un punto (x_0, y_0) del plano (x,y), $u(x_0,y_0) = u_0$. Las ecuaciones (1.25) (ó (1.26)) definen (con condición de continuidad de los coeficientes) una única característica de base. La solución sobre dicha característica queda unívocamente determinada por (1.27) (ó (1.28)). Esto es, dada u en un punto (x_0, y_0, u_0) queda determinado su valor sobre toda la curva característica que pasa por dicho punto (ver ejemplo 2).
Esto sugiere que si se asignan valores iniciales sobre una curva que intersecte a cada característica sólo en un punto, se obtiene (generalmente) una única superficie $u(x,y)$ solución de (1.23).
A continuación consideraremos, a título ilustrativo, distintos problemas para una EDP lineal.

Ejemplo 1. En primer lugar, hallaremos una integral general de la EDP

$$xy(u_x - u_y) = (x-y)u. \tag{1.30}$$

De los dos primeros téminos del sistema característico

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-xy} = \frac{du}{(x-y)u}, \tag{1.31}$$

obtenemos la integral

$$x + y = c. \tag{1.32}$$

Del 1° y 3° término resulta la ecuación

$$\frac{du}{u} = \frac{(2x - c)}{x(c - x)} dx, \tag{1.33}$$

cuya integral es

$$xyu = k. \tag{1.34}$$

Las constantes c y k no son independientes dado que provienen del mismo sistema característico, luego, la solución general (sin condiciones sobre u) vendrá dada por la relación arbitraria Φ entre c y k,

$$\Phi(x + y, xyu) = 0. \tag{1.35}$$

Ejemplo 2. Resolveremos ahora el problema de valor inicial

$$yu_x + xu_y = 2u, \qquad\qquad u(0, 1) = 1. \tag{1.36}$$

El sistema característico

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{du}{2u} \tag{1.37}$$

nos provee las curvas características de base

$$y^2 - x^2 = c. \tag{1.38}$$

Teniendo en cuenta la condición inicial, tomamos la rama positiva de esta función, es decir

$$y = \sqrt{c + x^2}. \tag{1.39}$$

Y sobre las curvas características es

$$u(x, y(x)) = \frac{1}{k}\, exp\left[2\, argsh\left(\frac{x}{\sqrt{y^2 - x^2}}\right)\right]. \tag{1.40}$$

La condición inicial $u(0, 1) = 1$ determina las constantes

$$c = 1, \qquad\qquad k = 1, \tag{1.41}$$

que corresponden a una curva característica de base y a sus valores sobre ella,

$$u(x, \sqrt{1 + x^2}) = exp\,[2\, argsh(x)]. \tag{1.42}$$

Si deseamos hallar la superficie solución que contenga a la curva inicial $u(0, y) = y$, entonces las constantes son

$$y^2 \;=\; c, \qquad\qquad yk \;=\; 1, \tag{1.43}$$

y la relación entre ellas es

$$c \;=\; \frac{1}{k^2}. \tag{1.44}$$

Esta relación determina la solución

$$u(x, y) \;=\; \begin{cases} \sqrt{y^2 - x^2}\; exp\left[2\, argsh\left(\frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}}\right)\right], & y > x \\ -\sqrt{y^2 - x^2}\; exp\left[-2\, argsh\left(\frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}}\right)\right], & y < x \end{cases} \tag{1.45}$$

que verifica la condición inicial y es válida para $|y| > |x|$ en el campo real.
Para considerar el caso $|y| < |x|$, deberíamos tomar $x^2 - y^2 = c$, y obtendríamos una solución análoga a la anterior.
Para $|x| = |y|$ se obtienen las soluciones:

$$\begin{aligned} y - x &= c, \qquad u \;=\; k\, y^2, \\ y + x &= c, \qquad u \;=\; \frac{k}{y^2}. \end{aligned} \tag{1.46}$$

Ejemplo 3. Resolveremos la EDP

$$(y^3x - 2x^4)u_x + (2y^4 - x^3y)u_y \;=\; 9u(x^3 - y^3) \tag{1.47}$$

con la condición inicial

$$u(x, 1/x) \;=\; x^3. \tag{1.48}$$

El sistema característico asociado

$$\frac{dx}{y^3x - 2x^4} \;=\; \frac{dy}{2y^4 - x^3y} \;=\; \frac{du}{9u(x^3 - y^3)}, \tag{1.49}$$

tiene como soluciones a las funciones

$$x^3 + y^3 \;=\; cx^2y^2, \qquad ux^3y^3 \;=\; k. \tag{1.50}$$

La primera función se obtiene al integrar los dos primeros términos del sistema, cuya ecuación equivalente es

$$\frac{x^2dx + y^2dy}{x^2(y^3x - 2x^4) + y^2(2y^4 - x^3y)} = \frac{xy^2dx + yx^2dy}{xy^2(y^3x - 2x^4) + yx^2(2y^4 - x^3y)} \tag{1.51}$$

y que simplificada adopta la forma

$$\frac{3x^2dx + 3y^2dy}{x^3 + y^3} = 2\frac{dx}{x} + 2\frac{dy}{y}. \tag{1.52}$$

La función $ux^3y^3 = k$ resulta de resolver

$$\frac{ydx + xdy}{y(y^3x - 2x^4) + x(2y^4 - x^3y)} = \frac{du}{9u(x^3 - y^3)}, \tag{1.53}$$

o bien

$$\frac{3dx}{x} + \frac{3dy}{y} + \frac{du}{u} = 0. \tag{1.54}$$

La condición inicial $xy = 1$, $u = x^3$, determina la relación entre las constantes, pues de

$$c = x^3 + \frac{1}{x^3}, \qquad k = x^3, \tag{1.55}$$

resulta

$$c = k + \frac{1}{k}. \tag{1.56}$$

Por lo tanto,

$$x^3 + y^3 = \left(ux^3y^3 + \frac{1}{ux^3y^3}\right)x^2y^2. \tag{1.57}$$

Explicitando u se obtiene

$$u(x,y) = \frac{1}{2x^5y^5}\left(x^3 + y^3 \pm \sqrt{(x^3+y^3)^2 - 4x^4y^4}\right),$$

y resulta la solución al problema de valor inicial planteado

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2x^5y^5}\left(x^3 + y^3 + \sqrt{(x^3+y^3)^2 - 4x^4y^4}\right), & x > 1, \\ \frac{1}{2x^5y^5}\left(x^3 + y^3 - \sqrt{(x^3+y^3)^2 - 4x^4y^4}\right), & x < 1, \end{cases} \tag{1.58}$$

donde el signo de la raíz se determina empleando la condición inicial.

1.3 Ecuaciones cuasi-lineales de primer orden

La ecuación cuasi-lineal en dos variables independientes es de la forma

$$a(x,y,u)\,u_x + b(x,y,u)\,u_y = c(x,y,u). \tag{1.59}$$

Una solución $u = u(x,y)$ de (1.59) define una superficie integral en el espacio cuyo gradiente es el vector $(u_x, u_y, -1)$, normal a dicha superficie integral. La ecuación (1.59) expresa la condición de ortogonalidad entre el gradiente de u y el vector (a, b, c). Por lo tanto, (a, b, c) es, en cada punto, tangente a

la superficie integral y define en el espacio (x, y, u) un campo de direcciones $(a(x, y, u), b(x, y, u), c(x, y, u))$ llamadas *direcciones características*. Las curvas integrales de este campo, o sea, la familia de curvas cuyas tangentes coinciden con las direcciones características, se llaman *curvas características* y están dadas por el sistema característico

$$\frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)} = \frac{du}{c(x, y, u)}, \tag{1.60}$$

que en forma paramétrica se escribe

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y, u), \qquad \frac{dy}{ds} = b(x, y, u), \qquad \frac{du}{ds} = c(x, y, u). \tag{1.61}$$

Si a, b, c son funciones suficientemente diferenciables, la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias garantiza que por cada punto pasará una única característica.

Un problema de valor inicial para la ecuación cuasi-lineal (1.59) consiste en hallar una superficie integral que contenga a una curva dada. Si tal superficie integral existe, está generada por la familia de curvas características que pasan por los puntos de la curva inicial. Así lo establece el teorema que presentamos a continuación.

Teorema 1.1 *Una superficie* $u = u(x, y)$ *es una superficie integral de la EDP* $a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y)$ *si y sólo si* u *está formada por curvas características.*

Demostración: Supongamos que $u(x, y)$ es una superficie integral, es decir que verifica la ecuación $au_x + bu_y = c$. Por cada punto $P_0(x_0, y_0, u_0)$ de la superficie u y con dirección $(a(x_0, y_0, u_0), b(x_0, y_0, u_0), c(x_0, y_0, u_0))$ pasa una curva característica (ecuación (1.60)). Por lo tanto, u está generada por curvas características.

Recíprocamente, si $u(x, y)$ está formada por curvas características, su plano tangente en $P_0(x_0, y_0, u_0)$,

$$u - u_0 = u_x(P_0)(x - x_0) + u_y(P_0)(y - y_0), \tag{1.62}$$

contiene a la recta tangente a la característica que pasa por P_0,

$$\frac{x - x_0}{a(x_0, y_0, u_0)} = \frac{y - y_0}{b(x_0, y_0, u_0)} = \frac{u - u_0}{c(x_0, y_0, u_0)}, \tag{1.63}$$

es decir, verifica $au_x + bu_y = c$ en cada punto de la superficie u, por lo tanto u es una superficie integral.

Como corolario de este teorema obtenemos el siguiente resultado:

Si dos superficies integrales se cortan en un punto no singular, se cortan a lo largo de la curva característica que pasa por él.

Ejemplo 4. En primer lugar hallaremos la solución general de la ecuación cuasi-lineal

$$(y+u)u_x + (x+u)u_y = x+y. \tag{1.64}$$

El sistema característico asociado a la ecuación es

$$\frac{dx}{y+u} = \frac{dy}{x+u} = \frac{du}{x+y}; \tag{1.65}$$

e integrando el sistema equivalente

$$\frac{dx+dy+du}{2(x+y+u)} = \frac{dx-dy}{y-x} = \frac{du-dx}{x-u}, \tag{1.66}$$

resultan

$$\begin{aligned} (x+y+u)(y-x)^2 &= c, \\ (x+y+u)(x-u)^2 &= k. \end{aligned} \tag{1.67}$$

En consecuencia, una integral general es

$$\Phi((x+y+u)(y-x)^2, (x+y+u)(x-u)^2) = 0. \tag{1.68}$$

Ejemplo 5. Resolveremos la ecuación cuasi-lineal que representa el movimiento ondulatorio unidireccional no lineal

$$u_t + uu_x = 0, \tag{1.69}$$

con la condición inicial:

$$u(x,0) = -x. \tag{1.70}$$

La condición inicial parametrizada es

$$x = \tau, \qquad t = 0, \qquad u = -\tau. \tag{1.71}$$

Las ecuaciones características

$$\frac{dx}{ds} = u, \qquad \frac{dt}{ds} = 1, \qquad \frac{du}{ds} = 0, \tag{1.72}$$

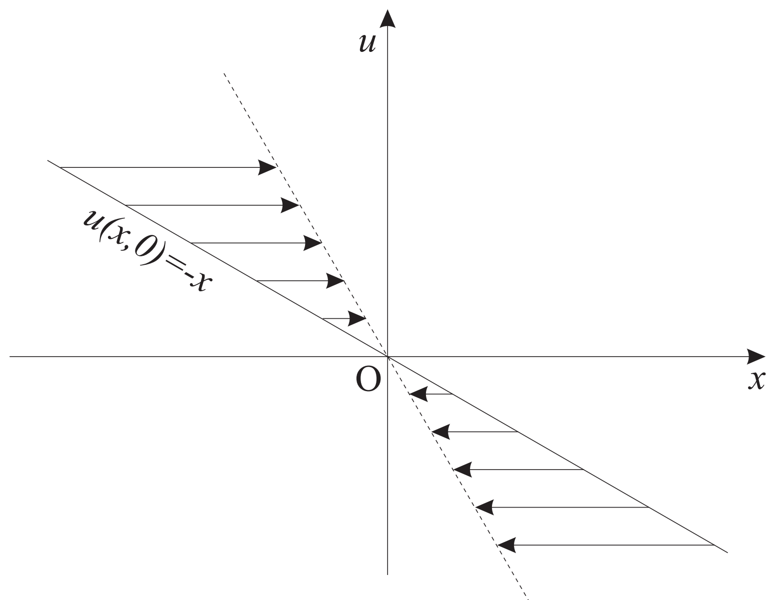


Figura 1.2: Movimiento ondulatorio unidimensional no lineal en el plano (x, u) (ver ecuación (1.72)).

proveen las soluciones

$$x = us + c_1, \qquad t = s + c_2, \qquad u = c_3. \tag{1.73}$$

Para $s = 0$ las curvas características pasan por la curva inicial determinando la superficie integral buscada,

$$x(s,\tau) = us + \tau, \qquad t(s,\tau) = s, \qquad u(s,\tau) = -\tau. \tag{1.74}$$

Eliminando los parámetros resulta

$$u(x,t) = \frac{x}{t-1}. \tag{1.75}$$

Analizando esta ecuación en el plano (x, u) se advierte que $(0, 0)$ es un punto estacionario y que los puntos restantes se mueven con mayor velocidad a medida que se alejan del punto estacionario, según muestra la figura 1.2. En $t = 1$ es $x = 0$ (eje u), y por lo tanto, u puede tomar cualquier valor.
Además, se comprueba que por cada punto de la superficie solución con $t \neq 1$ pasa una curva característica. Por ejemplo, la condición $u(1, 0) = -1$ determina la característica

$$x + t = 1, \quad u = -1, \tag{1.76}$$

perteneciente a la superficie integral.

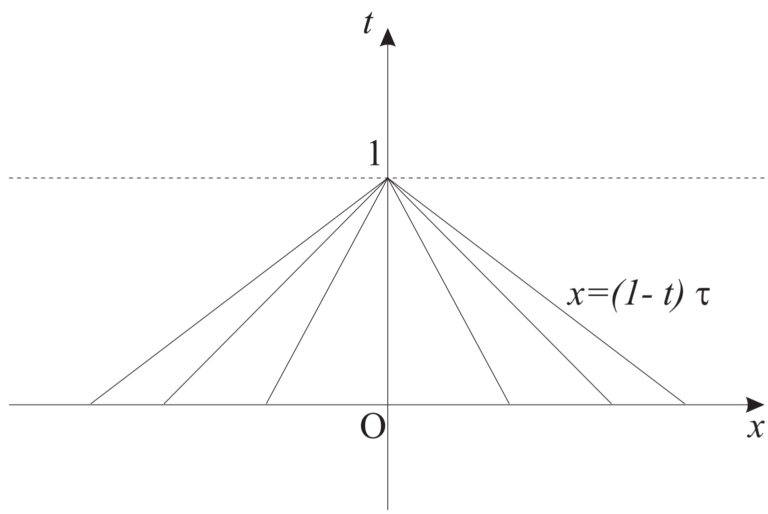


Figura 1.3: Curvas características para el movimiento ondulatorio unidimensional no lineal en el plano (x, t).

Si se observan las ecuaciones paramétricas de la superficie integral se ve que para $t = 1$, u es indeterminada. En efecto, en $t = 1$ se tiene un punto singular, tal como se aprecia en la figura 1.3.

Si a la misma EDP se le impone la condición inicial

$$u(x, 0) = x, \tag{1.77}$$

se obtiene la solución

$$u(x, t) = \frac{x}{t + 1}, \tag{1.78}$$

que está definida $\forall t > 0$.

A continuación demostraremos un teorema relativo a la existencia y unicidad de soluciones de EDP cuasi-lineales.

Teorema 1.2 *Sea la EDP cuasi-lineal*

$$a(x, y, u)\; u_x + b(x, y, u)\; u_y = \; c(x, y, u), \tag{1.79}$$

con $a, b, c,$ funciones con derivadas parciales continuas con respecto a x, y, u en un entorno de una curva γ. Se supone que la curva γ está representada por las ecuaciones $x_1(\tau),\; y_1(\tau),\; u_1(\tau)$ y tiene derivada continua para $\tau_1 < \tau < \tau_2$. Si sobre γ se verifica

$$\left(a\frac{dy}{d\tau} - b\frac{dx}{d\tau}\right)\rfloor_\gamma \neq 0, \tag{1.80}$$

entonces existe una única solución $u(x,y)$ definida en algún entorno de γ y que satisface la condición inicial, es decir tal que

$$u(x_1(\tau), y_1(\tau)) = u_1(\tau). \tag{1.81}$$

Demostración: El sistema de ecuaciones ordinarias

$$\frac{dx}{ds} = a(x,y,u), \qquad \frac{dy}{ds} = b(x,,y,u) \qquad \frac{du}{ds} = c(x,y,u) \tag{1.82}$$

admite como única solución a la familia de características

$$x(\tau,s), \quad y(\tau,s), \quad u(\tau,s), \tag{1.83}$$

que satisfacen las condiciones iniciales

$$x(\tau,0) = x_1(\tau), \quad y(\tau,0) = y_1(\tau), \quad u(\tau,0) = u_1(\tau). \tag{1.84}$$

Por hipótesis, el Jacobiano sobre γ

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\tau,s)}\rfloor_{s=0} = \left(b\frac{dx_1}{d\tau} - a\frac{dy_1}{d\tau}\right)\rfloor_{s=0} \neq 0 \tag{1.85}$$

es continuo en un entorno de γ. Por lo tanto, en dicho entorno pueden hallarse $\tau(x,y)$ y $s(x,y)$. Sea $u(x,y) = u(\tau(x,y), s(x,y))$, se ve que u contiene a la curva inicial γ y además satisface la ecuación diferencial pues

$$\begin{aligned} a\,u_x + b\,u_y &= a\,(u_\tau \tau_x + u_s s_x) + b\,(u_\tau \tau_y + u_s s_y), \\ &= u_\tau\,(a\tau_x + b\tau_y) + u_s\,(as_x + bs_y), \\ &= u_\tau\,(x_s\tau_x + y_s\tau_y) + u_s\,(x_s s_x + y_s s_y) \\ &= u_\tau\,\tau_s + u_s s_s = c. \end{aligned} \tag{1.86}$$

En las condiciones de las hipótesis, por cada punto pasa una sola característica. El teorema 1.1 afirma que la solución está generada por las características que pasan por los puntos de la curva inicial γ. Por tanto, la solución es única.

Ejemplo 6. Aplicaremos el teorema 1.2 a la resolución de la ecuación

$$u\,u_x + u_y = 1 \tag{1.87}$$

con la condición inicial

$$x = y, \quad u = x/2, \quad x \in [0,1]. \tag{1.88}$$

Parametrizando la curva inicial γ se tiene

$$x = \tau, \quad y = \tau, \quad u = \tau/2 \qquad \tau \in [0,1]. \tag{1.89}$$

y advertimos que existe una solución única en un entorno de γ, pues

$$\left(a\frac{dy}{d\tau} - b\frac{dx}{d\tau}\right)\rfloor_\gamma = \frac{\tau}{2} - 1 \neq 0, \quad \tau \in [0,1]. \tag{1.90}$$

Las ecuaciones características

$$\frac{dx}{ds} = u, \quad \frac{dy}{ds} = 1, \quad \frac{du}{ds} = 1, \tag{1.91}$$

admiten las soluciones

$$y = s + c_1, \quad u = s + c_2, \quad x = \frac{s^2}{2} + c_2 s + c_3. \tag{1.92}$$

Para $s = 0$ se obtiene la curva inicial

$$c_2 = \frac{\tau}{2} \quad c_1 = c_3 = \tau, \tag{1.93}$$

quedando así determinada la superficie integral

$$x = \frac{s^2}{2} + s\frac{\tau}{2} + \tau, \quad y = s + \tau, \quad u = s + \frac{\tau}{2}. \tag{1.94}$$

Finalmente, eliminando los parámetros auxiliares s y τ, se obtiene

$$u = \frac{4y - 2x - y^2}{2(2 - y)}, \tag{1.95}$$

que es la solución buscada.

1.4 Ecuaciones generales de primer orden

El método de las características puede extenderse a fin de tratar el caso de una EDP general de primer orden en $u(x, y)$ cuya expresión general es

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \tag{1.96}$$

Nótese que las ecuaciones lineales y cuasi-lineales son casos particulares de (1.96).

Si $u(x, y)$ es una superficie integral de (1.96), y $p = u_x$, $q = u_y$, entonces el plano tangente a u en el punto (x_0, y_0, u_0) tiene números directores $(p, q, -1)$ que satisfacen la ecuación

$$F(x_0, y_0, u_0, p, q) = 0. \tag{1.97}$$

Para ilustrar esta situación consideremos la ecuación $u_x u_y = 1$, que escrita en la forma (1.97) es $F = pq - 1 = 0$. Las direcciones de los planos tangentes a una superficie integral deben ser $(p, 1/p, -1)$.

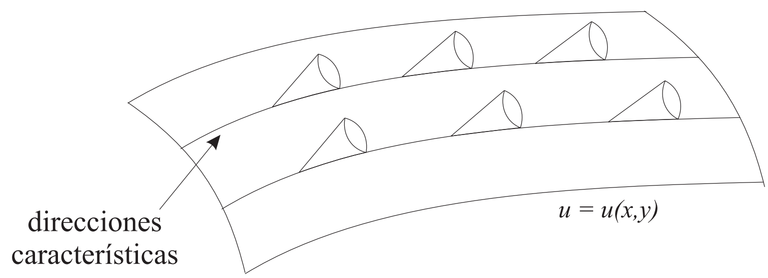


Figura 1.4: La superficie integral es tangente al cono de Monge en cada punto y la dirección común es la dirección característica.

Es decir, la familia de planos tangentes a una superficie integral de (1.96) debe tener números directores $(p, q(p), -1)$ donde $q(p)$ se obtiene de (1.97). Esta familia de planos tangentes en (x_0, y_0, u_0) determinados por $(p, q(p), -1)$ envuelven generalmente un cono, llamado *Cono de Monge*. Por lo tanto, si la superficie $u(x, y)$ es solución de (1.96), en cada punto (x_0, y_0, u_0) deberá ser tangente al cono de Monge en dicho punto, como lo ilustra la figura 1.4.
Las tangentes comunes a la superficie u y al cono de Monge determinan un campo de direcciones llamadas *direcciones características*.

A fin de obtener las direcciones características asociadas a $F(x, y, u, p, q) = 0$, comenzaremos hallando el cono de Monge respectivo en cada punto. Para ello recordemos el siguiente resultado.

Lema 1.1 *La envolvente de una familia monoparamétrica* $f(x, y, u, c) = 0$ *de superficies es la superficie que resulta de eliminar* c *de las ecuaciones*

$$f(x, y, u, c) = 0, \quad f_c(x, y, u, c) = 0. \tag{1.98}$$

A continuación se determina un sistema de ecuaciones que permite calcular el cono de Monge en un punto.

Proposición 1.1 *El cono de Monge asociado a la ecuación* $F(x, y, u, p, q) = 0$ *en el punto* (x_0, y_0, u_0) *se obtiene eliminando* p *y* q *de las ecuaciones*

$$F(x_0, y_0, u_0, p, q) = 0, \tag{1.99}$$

y

$$\frac{x - x_0}{F_p(x_0, y_0, u_0, p, q)} = \frac{y - y_0}{F_q(x_0, y_0, u_0, p, q)} =$$

$$= \frac{u - u_0}{pF_p(x_0, y_0, u_0, p, q) + qF_q(x_0, y_0, u_0, p, q)}. \tag{1.100}$$

Demostración: El cono de Monge en (x_0, y_0, u_0) es la envolvente de la familia monoparamétrica de planos,

$$u - u_0 = p(x - x_0) + q(p)(y - y_0), \tag{1.101}$$

en la que p y q satisfacen

$$F(x_0, y_0, u_0, p, q) = 0. \tag{1.102}$$

Aplicando el lema anterior a la familia (1.101) de parámetro p, se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} u - u_0 &= p(x - x_0) + q(p)(y - y_0), \\ 0 &= (x - x_0) + q'(p)(y - y_0). \end{aligned} \tag{1.103}$$

Por otra parte, derivando (1.102) respecto del parámetro p, resulta

$$F_p(x_0, y_0, u_0, p, q) + q'(p)F_q(x_0, y_0, u_0, p, q) = 0, \tag{1.104}$$

y eliminando $q'(p)$ entre las ecuaciones (1.103) y (1.104) se obtienen finalmente las ecuaciones (1.100).

Ejemplo 7. Hallaremos el cono de Monge asociado a la ecuación $F = u_x u_y - 1 = 0$, para lo cual además de la EDP consideramos el sistema (1.100)

$$\frac{x - x_0}{q} = \frac{y - y_0}{p} = \frac{u - u_0}{2}. \tag{1.105}$$

Eliminando p y q resulta el cono de ecuación

$$4(x - x_0)(y - y_0) = (u - u_0)^2. \tag{1.106}$$

El cono correspondiente al punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 1)$ se presenta, a modo de ilustración, en la figura 1.5.

Ejemplo 8. Consideremos ahora la ecuación *eiconal* de la óptica geométrica, $F = u_x^2 + u_y^2 - n^2 = 0$. El cono de Monge asociado a ella se obtiene a partir del sistema

$$p^2 + q^2 - n^2 = 0,$$

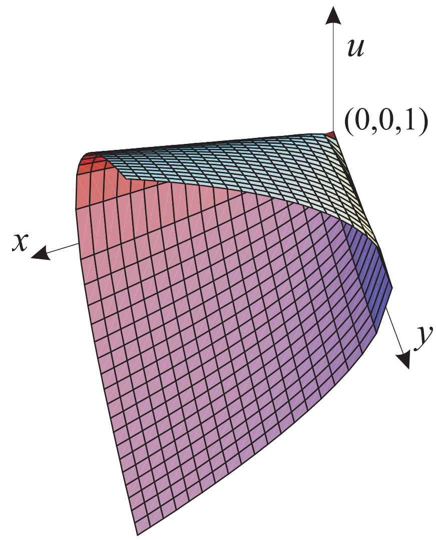


Figura 1.5: Cono de Monge para la ecuación $u_x u_y - 1 = 0$ en el punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 1)$.

$$\frac{x - x_0}{2p} = \frac{y - y_0}{2q} \quad = \quad \frac{u - u_0}{2n^2}, \tag{1.107}$$

por lo tanto su ecuación es

$$n^2 \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right] = (u - u_0)^2. \tag{1.108}$$

Notemos que para una EDP cuasi-lineal, el cono de Monge degenera en una recta, pues se obtiene de las ecuaciones

$$F = a(x_0, y_0, u_0)p + b(x_0, y_0, u_0)q - c(x_0, y_0, u_0) = 0,$$

$$\frac{x - x_0}{a(x_0, y_0, u_0)} = \frac{y - y_0}{b(x_0, y_0, u_0)} = \frac{u - u_0}{pa(x_0, y_0, u_0) + qb(x_0, y_0, u_0)}, \tag{1.109}$$

dando como resultado

$$\frac{x - x_0}{a(x_0, y_0, u_0)} = \frac{y - y_0}{b(x_0, y_0, u_0)} = \frac{u - u_0}{c(x_0, y_0, u_0)}. \tag{1.110}$$

Las direcciones de las aristas del cono de Monge

$$\frac{x - x_0}{F_p} = \frac{y - y_0}{F_q} = \frac{u - u_0}{pF_p + qF_q} \tag{1.111}$$

son las *direcciones características*, de modo que las curvas características son soluciones del sistema

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{du}{pF_p + qF_q}, \tag{1.112}$$

o bien, parametrizando

$$\frac{dx}{ds} = F_p, \qquad \frac{dy}{ds} = F_q, \qquad \frac{du}{ds} = pF_p + qF_q. \tag{1.113}$$

Pero dado que p y q no se conocen, no basta (1.112) para determinar las curvas características. Extendemos entonces el sistema característico derivando $F(x, y, u, p, q) = 0$ respecto de x y de y,

$$\begin{aligned} F_x + pF_u + p_x F_p + q_x F_q &= 0, \\ F_y + qF_u + p_y F_p + q_y F_q &= 0. \end{aligned} \tag{1.114}$$

Observando que las características, soluciones de (1.112), verifican

$$\begin{aligned} \frac{dp}{ds} &= p_x \frac{dx}{ds} + p_y \frac{dy}{ds} = p_x F_p + p_y F_q, \\ \frac{dq}{ds} &= q_x \frac{dx}{ds} + q_y \frac{dy}{ds} = q_x F_p + q_y F_q, \end{aligned} \tag{1.115}$$

y, suponiendo que u tiene derivadas segundas continuas ($p_y = q_x$), de (1.114) y (1.115) resultan

$$\frac{dp}{ds} = -F_x - pF_u, \qquad \frac{dq}{ds} = -F_y - qF_u. \tag{1.116}$$

A partir de las ecuaciones (1.113) y (1.116) pueden obtenerse $x(s)$, $y(s)$, $u(s)$, $p(s)$ y $q(s)$ tales que $F(x, y, u, p, q) = 0$.
Esto significa que además de una curva $x(s)$, $y(s)$, $u(s)$ en el espacio, se obtiene en cada punto una dirección $(p, q, -1)$ que define un plano tangente; esta solución se interpreta como una *franja característica*, y a la curva $x(s)$, $y(s)$, $u(s)$ se la denomina *curva característica*. La situación se ilustra en la figura 1.6.

El resultado anterior se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 1.3 *Las franjas características asociadas a $F(x, y, u, p, q) = 0$ están determinadas por dicha ecuación y la solución del sistema característico*

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{du}{pF_p + qF_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_u} = -\frac{dq}{F_y + qF_u}. \tag{1.117}$$

o bien, del sistema característico parametrizado

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{ds} = F_p, \qquad \frac{dy}{ds} = F_q, \qquad \frac{du}{ds} = pF_p + qF_q, \\ &\frac{dp}{ds} = -(F_x + pF_u), \qquad \frac{dq}{ds} = -(F_y + qF_u). \end{aligned} \tag{1.118}$$

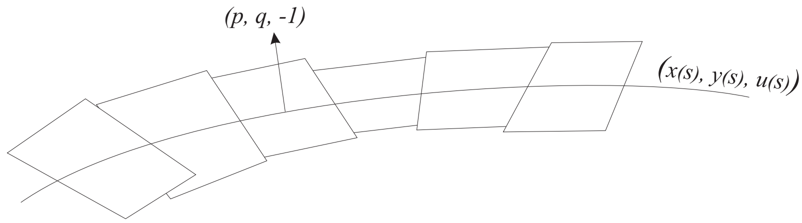


Figura 1.6: Franja característica.

De las tres primeras ecuaciones (1.117) se deduce que las franjas características verifican la relación

$$\frac{du}{ds} = p\frac{dx}{ds} + q\frac{dy}{ds}, \tag{1.119}$$

que se denomina *condición de franja*.

Un *problema de valor inicial o problema de Cauchy* consiste en hallar la superficie integral de $F(x, y, u, p, q) = 0$ que contiene a una curva dada.
Si la curva inicial tiene ecuación $x_0(\tau)$, $y_0(\tau)$, $u_0(\tau)$ y sobre ella p y q toman valores $p_0(\tau)$, $q_0(\tau)$, éstos están obligados a verificar la EDP,

$$F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) = 0, \tag{1.120}$$

y la condición de franja,

$$\frac{du_0}{d\tau} = p_0(\tau)\frac{dx_0}{d\tau} + q_0(\tau)\frac{dy_0}{d\tau}. \tag{1.121}$$

Las cantidades $x_0(\tau)$, $y_0(\tau)$, $u_0(\tau)$, $p_0(\tau)$, $q_0(\tau)$ definen la *franja inicial*.

Ejemplo 9. Hallaremos la superficie solución de $u_x u_y = 1$ que contiene a la curva $u(x, 0) = x$.

Apliquemos el teorema 1.3 a fin de obtener las franjas características de la ecuación $F = pq - 1 = 0$. Integrando (1.118) se obtienen

$$p = c_1,\ q = c2,\ x = c_2 s + c_3,\ y = c_1 s + c_4,\ u = 2s + c_5,$$

y dado que $pq = 1$, las franjas están dadas por

$$p = c_1,\ q = \frac{1}{c_1},\ x = \frac{1}{c_1}s + c_3,\ y = c_1 s + c_4,\ u = 2s + c_5.$$

Para determinar las constantes c_1, c_3, c_4 y c_5, parametrizamos la curva inicial

$$x = \tau, \qquad y = 0, \qquad u = \tau, \tag{1.122}$$

y de (1.121) obtenemos que $p = 1$. La superficie integral es entonces

$$x = s + \tau, \qquad y = s, \qquad u = 2s + \tau, \tag{1.123}$$

y eliminando los parámetros auxiliares resulta

$$u(x, y) = x + y. \tag{1.124}$$

A continuación presentaremos el teorema que asegura la existencia y unicidad de la solución para el problema de Cauchy.

Teorema 1.4 *Sea $F(x, y, u, p, q) = 0$ con derivadas segundas continuas respecto a todas sus variables. Dada una curva inicial $x_0(\tau)$, $y_0(\tau)$, $u_0(\tau)$ con derivadas segundas continuas, sobre ella las direcciones $p_0(\tau)$, $q_0(\tau)$ con derivadas continuas deben verificar*

$$\begin{aligned} F(x_0(\tau), y_0(\tau), u_0(\tau), p_0(\tau), q_0(\tau)) = 0, \\ \frac{du_0}{d\tau} = p_0 \frac{dx_0}{d\tau} + q_0 \frac{dy_0}{d\tau}, \end{aligned} \tag{1.125}$$

si

$$\left(\frac{dx_0}{d\tau} F_q(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) - \frac{dy_0}{d\tau} F_p(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) \right) \rfloor_\gamma \neq 0, \tag{1.126}$$

entonces, en algún entorno de la curva inicial existe una solución única $u(x, y)$ que contiene a la franja inicial, es decir, tal que

$$\begin{aligned} u(x_0(\tau), y_0(\tau)) = u_0(\tau), \\ u_x(x_0(\tau), y_0(\tau)) = p_0(\tau), \\ u_y(x_0(\tau), y_0(\tau)) = q_0(\tau). \end{aligned} \tag{1.127}$$

Demostración: El sistema característico asociado a la EDP

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} = F_p, \qquad \frac{dy}{ds} = F_q, \qquad \frac{du}{ds} = pF_p + qF_q, \\ \frac{dp}{ds} = -(F_x + pF_u), \qquad \frac{dq}{ds} = -(F_y + qF_u) \end{aligned} \tag{1.128}$$

es un sistema de EDO y su solución provee las franjas características

$$x(s, \tau), \quad y(s, \tau), \quad u(s, \tau), \quad p(s, \tau), \quad q(s, \tau). \tag{1.129}$$

Supongamos que las franjas características para $s = 0$ dan la franja inicial, lo que equivale a tomar el origen del parámetro s sobre la franja inicial, es decir

$$x(0, \tau) = x_0(\tau), \;\; y(0, \tau) = y_0(\tau), \;\; u(0, \tau) = u_0(\tau),$$

$$p(0,\tau) = p_0(\tau), \quad q(0,\tau) = q_0(\tau). \tag{1.130}$$

Veremos que las curvas características, $x(s,\tau)$, $y(s,\tau)$, $u(s,\tau)$, determinan una superficie integral.
Dado que sobre la curva inicial el Jacobiano es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,\tau)}\rfloor_\gamma \neq 0 \tag{1.131}$$

por la condición (1.126), en un entorno de la curva inicial pueden definirse las funciones $s = s(x,y)$, $\tau = \tau(x,y)$, de donde

$$u = u(s(x,y),\tau(x,y)) = u(x,y), \tag{1.132}$$

y también

$$\begin{aligned} p &= p(s(x,y),\tau(x,y)) = p(x,y), \\ q &= q(s(x,y),\tau(x,y)) = q(x,y). \end{aligned} \tag{1.133}$$

Las consideraciones previas sobre las franjas características permiten afirmar que

$$F(x,y,u,p,q) = 0. \tag{1.134}$$

Entonces la función u de (1.132) es solución si

$$p = u_x, \qquad q = u_y. \tag{1.135}$$

Para demostrar esto definimos la expresión

$$v(s,\tau) = u_\tau - px_\tau - qy_\tau, \tag{1.136}$$

y teniendo en cuenta (1.125) es

$$v(0,\tau) = u_{0\tau} - p_0x_{0\tau} - q_0y_{0\tau} = 0. \tag{1.137}$$

Calculando

$$\frac{\partial v}{\partial s} = u_{\tau s} - p_s x_\tau - p x_{\tau s} - q_s y_\tau - q y_{\tau s} \tag{1.138}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial \tau}(u_s - px_s - qy_s) + p_\tau x_s + q_\tau y_s - p_s x_\tau - q_s y_\tau, \tag{1.139}$$

y utilizando el sistema característico (1.128) se obtiene

$$\frac{\partial v}{\partial s} = p_\tau F_p + q_\tau F_q + (F_x + pF_u)x_\tau + (F_y + qF_u)y_\tau. \tag{1.140}$$

Sumando y restando $F_u u_\tau$ resulta finalmente

$$\frac{\partial v}{\partial s} = F_\tau - F_u v = -F_u v, \tag{1.141}$$

pues $F_\tau = 0$.
Para τ fijo, la EDO
$$\frac{dv}{ds} = -F_u v \tag{1.142}$$
admite la solución
$$v = v(0) \ \ e^{-\int_0^s F_u ds}. \tag{1.143}$$
Pero $v(0) = 0$, de donde $v \equiv 0$ y
$$u_\tau = px_\tau + qy_\tau, \tag{1.144}$$
y del sistema característico (1.128) es
$$u_s = px_s + qy_s. \tag{1.145}$$
Estas dos últimas ecuaciones forman un sistema en p y q. En tanto, para las curvas características se obtiene que
$$\begin{aligned} u_\tau &= u_x x_\tau + u_y y_\tau, \\ u_s &= u_x x_s + u_y y_s, \end{aligned} \tag{1.146}$$
es decir, u_x y u_y satisfacen el mismo sistema que p y q, de modo que, siendo
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,\tau)}\rfloor_\gamma \neq 0 \tag{1.147}$$
por hipótesis, en algún entorno de la curva inicial es
$$p = u_x, \qquad q = u_y. \tag{1.148}$$
La continuidad de los coeficientes del sistema característico (1.128) garantiza que por cada punto de la curva inicial pasa una única curva característica. En consecuencia, la única superficie integral está generada por curvas características.

En el ejemplo que sigue aplicamos el teorema 1.4 para asegurar la región de existencia y unicidad de la solución de una EDP.

Ejemplo 10. Consideremos nuevamente la ecuación eiconal de la óptica geométrica,
$$u_x^2 + u_y^2 = n^2, \tag{1.149}$$
con la condición inicial
$$u(x,x) = ax, \tag{1.150}$$
siendo a y n constantes.

La franja inicial está dada por las ecuaciones paramétricas
$$x_0 = \tau, \quad y_0 = \tau, \quad u_0 = a\tau \tag{1.151}$$

$$p_0(\tau) + q_0(\tau) = a, \quad p_0^2 + q_0^2 = n^2 \tag{1.152}$$

donde hemos utilizado la ecuación (1.125).
Con el fin de obtener expresiones simples para p_0, q_0, introducimos el cambio de variables:

$$p = ncos\theta, \quad q = nsen\theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \tag{1.153}$$

con el que obtenemos

$$p_0 = p, \quad q_0 = q, \quad a = n(cos\theta + sen\theta) = n\sqrt{2}\, sen\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right). \tag{1.154}$$

Notemos que θ tiene un valor fijo, por ejemplo, si $a = n$, será $\theta = 0$.
De la condición (1.126) se tiene que

$$2(sen\theta - cos\theta) \neq 0, \tag{1.155}$$

por lo que debemos excluir los valores $\theta = \pi/4$ y $\theta = 5\pi/4$, y el correspondiente valor de a, es decir $a = \pm n\sqrt{2}$.
El sistema característico es

$$\frac{dx}{ds} = 2p, \quad \frac{dy}{ds} = 2q, \quad \frac{du}{ds} = 2(p^2 + q^2) = 2n^2, \quad \frac{dp}{ds} = 0, \quad \frac{dq}{ds} = 0. \tag{1.156}$$

Por tanto, p y q son constantes sobre las características,

$$p(s,\tau) = p_0 = n\, cos\theta, \quad q(s,\tau) = q_0 = n\, sen\theta, \tag{1.157}$$

y las características son

$$x(s,\tau) = 2ns\, cos\theta + \tau, \quad y(s,\tau) = 2ns\, sen\theta + \tau, \tag{1.158}$$

$$u(s,\tau) = 2n^2 s + (sen\theta + cos\theta)n\tau. \tag{1.159}$$

Hallando s y τ en función de x e y,

$$s = \frac{y - x}{2n(sen\theta - cos\theta)}, \quad \tau = \frac{x\, sen\theta - y\, cos\theta}{(sen\theta - cos\theta)}, \tag{1.160}$$

y reemplazando en $u(s,\tau)$, obtenemos

$$u(x,y) = n(x\, cos\theta + y\, sen\theta) \tag{1.161}$$

que es la solución de la onda plana, donde

$$\theta = \arcsin\left(\frac{a}{n\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4}. \tag{1.162}$$

En el marco de la óptica geométrica siendo $u(x,y)$ solución de la ecuación eiconal, las curvas de nivel $u = cte$ describen los frentes de onda, en tanto

que las curvas características de base $x = x(s,\tau)$, $y = y(s,\tau)$, para s fijo, representan los haces de luz.
Las curvas de nivel son rectas que corresponden a planos en el problema tridimensional y se llaman ondas planas. Los vectores tangentes a las características de base, $dx/ds = 2p$, $dy/ds = 2q$, son rectas, y los vectores normales a las curvas de nivel son $\nabla u = (p,q)$. Por lo tanto, los haces de luz son normales a los frentes de onda.

Ejemplo 11.a Hallaremos una solución para la EDP

$$u_x u_y = 4xyu, \tag{1.163}$$

con la condición inicial

$$u(x,0) = x^2. \tag{1.164}$$

Se deja al lector la verificación de las hipótesis del teorema 1.4.

El sistema característico asociado a la ecuación $F = pq - 4xyu = 0$ es

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{du}{2pq} = \frac{dp}{4y(u+xp)} = \frac{dq}{4x(u+yq)}. \tag{1.165}$$

Para integrarlo resulta conveniente modificar la forma de este sistema. Realizando operaciones de proporcionalidad y utilizando la EDP obtenemos que

$$\frac{qdp - pdq}{pq} = \frac{ydx - xdy}{xy}, \tag{1.166}$$

o bien,

$$\frac{dp}{p} - \frac{dq}{q} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}, \tag{1.167}$$

cuya integración conduce a

$$\frac{p}{q} = a^2 \frac{x}{y}. \tag{1.168}$$

Reemplazando en la EDP, resultan

$$p = 2ax\sqrt{u}, \quad q = \frac{2y}{a}\sqrt{u}, \tag{1.169}$$

y parametrizando las tres primeras ecuaciones del sistema característico, se obtiene la familia de curvas características

$$ax^2 = 2s + b, \quad y^2 = 2sa + c, \quad \sqrt{u} = 2s + d. \tag{1.170}$$

Las curvas características que contienen a la franja inicial

$$x = \tau, \quad y = 0, \quad u = \tau^2, \quad p = 2\tau, \quad q = 0, \tag{1.171}$$

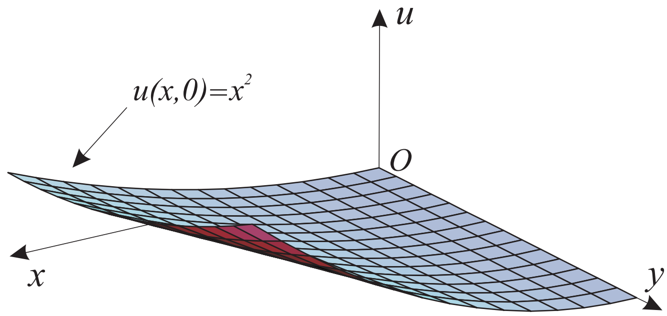


Figura 1.7: Superficie integral para el problema de valor inicial dado en el ejemplo 11.a.

son

$$ax^2 = s + a\tau^2, \quad y^2 = as, \quad \sqrt{u} = s + \tau. \tag{1.172}$$

Recordemos que los valores de p y de q iniciales se obtienen de (1.125).
El valor de a surge de la relación

$$p = 2ax\sqrt{u}, \tag{1.173}$$

y de la franja inicial, resultando $a = 1/\tau$.
La solución generada por las curvas características,

$$u(x, y) = x^2(y^2 + 1), \tag{1.174}$$

se muestra en la figura 1.7.

11.b Resolvemos el Problema de Cauchy para la misma EDP

$$u_x u_y = 4xyu, \tag{1.175}$$

con una condición inicial de mayor complejidad:

$$u(x, 1) = \frac{2}{3}x^3, \tag{1.176}$$

obteniendo la solución

$$u = \left\{ \frac{x^2}{27} - \left[\frac{1 - y^2 \pm \sqrt{(1 - y^2)^2 + 9x^2}}{3} \right]^2 \right\} \left\{ \frac{2(y^2 - 1) \pm \sqrt{(1 - y^2)^2 + 9x^2}}{9} \right\} \tag{1.177}$$

donde los signos $+$ y $-$ corresponden a $x > 0$ y $x < 0$, respectivamente, y se determinan de modo que u satisfaga la condición inicial.
Esta solución se obtiene hallando las características que contienen a la franja inicial:

$$x = \tau, \quad y = 1, \quad u = \frac{2}{3}\tau^3, \quad p = 2\tau^2, \quad q = \frac{4}{3}\tau^2, \tag{1.178}$$

con $a^2 = 3/2\tau$.

1.5 Ecuación general de primer orden para una función de n variables independientes

Sea

$$F(x_1, ..., x_n, u, p_1, ..., p_n) = 0, \tag{1.179}$$

una EDP para una función $u = u(x_1, ..., x_n)$, de n variables independientes, con derivadas parciales

$$p_i = u_{x_i}, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Una solución de la EDP (1.179) será una hipersuperficie del espacio $(n+1)$-dimensional, $(x_1, ..., x_n, u)$, y el sistema característico asociado a dicha ecuación es

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{ds} &= F_{p_i}, \qquad i = 1, ..., n \\ \frac{du}{ds} &= \sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i}, \\ \frac{dp_i}{ds} &= -(F_{x_i} + p_i F_u), \qquad i = 1, ..., n. \end{aligned} \tag{1.180}$$

Dada una variedad inicial $(n+1)$-dimensional,

$$x_{0_i} = x_{0_i}(\tau_1, ..., \tau_{n-1}), \qquad i = 1, ..., n, \tag{1.181}$$

el *problema de Cauchy* o de valor inicial consiste en resolver la EDP de modo que u sobre dicha variedad verifique la condición

$$u_0 = u_0(\tau_1, ..., \tau_{n-1}). \tag{1.182}$$

Asignando valores iniciales para p_i:

$$p_{0_i} = p_{0_i}(\tau_1, ..., \tau_{n-1}), \qquad i = 1, ..., n, \tag{1.183}$$

tales que

$$F(x_{0_1}, ...x_{0_n}, u_0, p_{0_1}, ..p_{0_n}) = 0, \tag{1.184}$$

y

$$\frac{\partial u_0}{\partial \tau_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_{0_i}}{\partial \tau_i} p_{0_i}, \tag{1.185}$$

para $j = 1, 2, ..., (n-1)$, se obtiene una franja inicial (1.181), (1.182), (1.183), que con (1.179) y (1.180) dan las franjas características:

$$x_i = x_i(\tau_1, ..., \tau_{n-1}, s), \qquad i = 1, ..., n, \tag{1.186}$$

$$u = u(\tau_1, ..., \tau_{n-1}, s), \tag{1.187}$$

$$p_i = p_i(\tau_1, ..., \tau_{n-1}, s), \qquad i = 1, ..., n. \tag{1.188}$$

Si el determinante Jacobiano verifica

$$\frac{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_{n-1}, s)} \neq 0, \tag{1.189}$$

en un entorno de la variedad inicial, puede probarse que

$$u = u(\tau_1(x_1, ..., x_n), ..., \tau_{n-1}(x_1, ..., x_n), s(x_1, ..., x_n)) = u(x_1, ..., x_n) \tag{1.190}$$

es la única solución del problema de Cauchy.
Vemos que el método de las características reduce el estudio de una EDP a resolver un sistema de EDO.

1.6 Distintos tipos de soluciones de una EDP

Según la forma de la función u, solución de una EDP de primer orden, ésta recibe distintas denominaciones.

Una función $u(x, y)$, solución de la EDP $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$, se llama *solución general* si depende de una *función arbitraria*.
Hemos presentado ejemplos de solución general en **1.1**.

Una solución de $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ es una *solución completa*, si depende de dos parámetros independientes a, b, es decir si es de la forma $\Phi(x, y, u, a, b) = 0$.
Por ejemplo, la familia de planos $u = ax + by + ab$ es solución completa de la ecuación $u = xu_x + yu_y + u_x u_y$, y la familia de paraboloides con vértices en los puntos del plano (x, y), $u = (x-a)^2 + (y-b)^2$, es solución completa de $u_x^2 + u_y^2 = 4u$.

La envolvente de una familia de soluciones dada por la solución completa, si existe, también satisface la EDP y se denomina *solución singular*.
Recordemos que dada una familia biparamétrica $f(x, y, u, a, b) = 0$, su envolvente se obtiene eliminando los parámetros a y b de entre las ecuaciones

$$f(x, y, u, a, b) = 0, \quad f_a(x, y, u, a, b) = 0, \quad f_b(x, y, u, a, b) = 0. \tag{1.191}$$

Así se obtiene la envolvente de la familia de planos $u = ax + by + ab$, dada por $u = -xy$, que es solución singular de $u = xu_x + yu_y + u_xu_y$.

Notemos que la solución singular puede hallarse sin conocer una solución completa, tal como lo propone el siguiente teorema.

Teorema 1.5 *Sea $F(x, y, u, p, q) = 0$ una EDP tal que $F_u \neq 0$. Una solución singular se obtiene eliminando p y q entre las ecuaciones*

$$F = 0, \quad F_p = 0, \quad F_q = 0. \tag{1.192}$$

Demostración: Supongamos la existencia de una integral completa dada por $u = f(x, y, a, b)$ de modo que es $F(x, y, f, f_x, f_y) = 0$ y, derivando respecto de los parámetros a y b, se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} F_uf_a + F_pf_{xa} + F_qf_{ya} &= 0, \\ F_uf_b + F_pf_{xb} + F_qf_{yb} &= 0. \end{aligned} \tag{1.193}$$

Si $F_p = F_q = 0$ y $F_u \neq 0$, resultan $f_a = f_b = 0$, que junto con f determinan la solución singular.
Si $F_u = 0$, podrían igualmente ser $f_a = f_b = 0$.

Citaremos a continuación algunos ejemplos.

- La EDP $pq = 1$ no posee solución singular ya que el sistema $pq - 1 = 0$, $p = 0$, $q = 0$, es incompatible.

- La solución singular de $u = e^x pq + xp + yq$ es $u = -xye^{-x}$.

El conocer una solución completa nos permite obtener la solución de problemas de valor inicial según lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 1.6 *Sea $f(x, y, u, a, b) = 0$ una solución completa de la ecuación $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$. La solución que contiene a la curva inicial $x(\tau)$, $y(\tau)$, $u(\tau)$ es la envolvente de la familia monoparamétrica $f(x, y, u, a(\tau), b(\tau)) = 0$, donde $a(\tau)$ y $b(\tau)$ se obtienen como solución del sistema*

$$\begin{aligned} f(x(\tau), y(\tau), u(\tau), a, b) &= 0, \\ f_xx'(\tau) + f_yy'(\tau) + f_uu'(\tau) &= 0. \end{aligned} \tag{1.194}$$

Demostración: Se sabe que la envolvente de una familia de soluciones es solución, basta entonces con demostrar que la curva inicial está contenida en la envolvente. Esto equivale a pedir que la curva inicial verifique

$$f(x, y, u, a(\tau), b(\tau)) = 0,$$

$$f_\tau(x, y, u, a(\tau), b(\tau)) = 0. \tag{1.195}$$

La curva inicial satisface la primera de las ecuaciones pues es

$$f(x(\tau), y(\tau), u(\tau), a, b) = 0.$$

Si se deriva respecto de τ la ecuación

$$f(x(\tau), y(\tau), u(\tau), a(\tau), b(\tau)) = 0, \tag{1.196}$$

sabiendo que

$$f_x x'(\tau) + f_y y'(\tau) + f_u u'(\tau) = 0, \tag{1.197}$$

se obtiene

$$f_a a'(\tau) + f_b b'(\tau) = f_\tau(x, y, u, a(\tau), b(\tau)) = 0, \tag{1.198}$$

con lo cual también se verifica la segunda ecuación en (1.195), quedando demostrado el teorema.

Ejemplo 12. La EDP $u_x u_y = 4xyu$ tiene como solución completa a la familia $u = (x^2 + a)(y^2 + b)$. Hallaremos la superficie integral que contiene a la curva $u(x, 0) = x^2$, utilizando el teorema anterior.

La curva parametrizada es $x = \tau$, $y = 0$, $u = \tau^2$, y resultan $a(\tau) = 0$, $b(\tau) = 1$. La solución al problema planteado es

$$u = x^2(y^2 + 1). \tag{1.199}$$

En este caso a y b no dependen de τ y la solución es un caso particular de la solución completa. Comparar con el ejemplo 11.a (ecuación (1.174)).

Ejemplo 13. Consideremos el problema de valor inicial $u_x u_y = 4xyu$ tal que $u(x, 1) = \frac{2}{3}x^3$, que ya ha sido analizado en el ejemplo 11.b.

Partiendo de la solución completa $u = (x^2 + a)(y^2 + b)$ de la ecuación dada, parametrizando la curva inicial $x = \tau$, $y = 1$, $u = 2\tau^3/3$, y con el sistema

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{3}\tau^3 &= (\tau^2+a)(1+b), &\quad (1.200)\\
2\tau^2 &= 2\tau(1+b), &\quad (1.201)
\end{aligned}
$$

obtenemos $b = \tau - 1$, $a = -\tau^2/3$.
La envolvente de la familia monoparamétrica $u = (x^2 - \frac{\tau^2}{3})(y^2 + \tau - 1)$ resulta de resolver el sistema

$$
\begin{aligned}
u &= (x^2 - \frac{\tau^2}{3})(y^2+\tau-1),\\
0 &= -\frac{2}{3}\tau(y^2+\tau-1) + x^2 - \frac{\tau^2}{3}. &\quad (1.202)
\end{aligned}
$$

De la segunda ecuación obtenemos

$$
\tau = \begin{cases} \frac{1-y^2}{3} + \sqrt{\left(\frac{1-y^2}{3}\right)^2 + x^2}, & x > 0 \\ \frac{1-y^2}{3} - \sqrt{\left(\frac{1-y^2}{3}\right)^2 + x^2}, & x < 0 \end{cases} \quad (1.203)
$$

y resulta la solución

$$
u = \left\{ \frac{x^2}{27} - \left[\frac{1-y^2 \pm \sqrt{(1-y^2)^2 + 9x^2}}{3} \right]^2 \right\} \left\{ \frac{2(y^2-1) \pm \sqrt{(1-y^2)^2+9x^2}}{9} \right\} \quad (1.204)
$$

donde el signo positivo de la raíz cuadrada corresponde a la solución para $x > 0$ y el negativo a $x < 0$. Puede verificarse que ésta es la misma solución obtenida en el ejemplo 11.b.

1.7 Métodos para la obtención de una solución completa

Hemos señalado ya el importante rol que desempeña la solución completa de una EDP, en tanto que permite resolver un problema de valor inicial. En las proposiciones que siguen presentamos resultados preliminares a los métodos más conocidos para obtener dicha solución.

Proposición 1.2 La ecuación diferencial

$$
P(x,y,u)dx + Q(x,y,u)dy + R(x,y,u)du = 0, \quad (1.205)
$$

es completamente integrable si y sólo si

$$P(Q_u - R_y) + Q(R_x - P_u) + R(P_y - Q_x) = 0. \tag{1.206}$$

Si $R \neq 0$ y la ecuación (1.205) puede escribirse en la forma

$$du = Sdx + Tdy, \tag{1.207}$$

y la condición (1.206) es

$$S_y + TS_u = T_x + ST_u. \tag{1.208}$$

Demostración: La ecuación (1.205) es completamente integrable si existe el factor integrante $\mu(x, y, u)$ y una función $F(x, y, u)$, con derivadas segundas continuas, tales que

$$\mu P = F_x, \quad \mu Q = F_y, \quad \mu R = F_u. \tag{1.209}$$

De aquí resultan

$$(\mu P)_y = F_{xy} = F_{yx} = (\mu Q)_x, \tag{1.210}$$

es decir

$$\mu(P_y - Q_x) = \mu_x Q - \mu_y P, \tag{1.211}$$

y, análogamente,

$$\begin{aligned} \mu(Q_u - R_y) &= \mu_y R - \mu_u Q, \\ \mu(R_x - P_u) &= \mu_u P - \mu_x R. \end{aligned} \tag{1.212}$$

Multiplicando las últimas tres ecuaciones por R, P y Q respectivamente resulta (1.206).
La condición (1.206) es una condición suficiente. En efecto, si se deja constante una variable, por ejemplo u, la ecuación (1.205) se reduce a

$$P(x, y, u)dx + Q(x, y, u)dy = 0, \tag{1.213}$$

donde u se toma como parámetro. Sea

$$f(x, y, u) = c = cte \tag{1.214}$$

una solución; si $\rho(x, y, u)$ es factor integrante de (1.213), entonces se verifica que

$$f_x = \rho P, \quad f_y = \rho Q, \tag{1.215}$$

pero, en general, será $f_u \neq \rho R$. Con

$$f_u = \rho R - g, \tag{1.216}$$

y en virtud de (1.206) resulta que

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = 0$$

para toda f, por lo que g es función de f y del parámetro u.
Consideremos la ecuación

$$df + g(f,u)du = 0; \tag{1.217}$$

si $h(f,u) = K$ es solución de esta ecuación y ν es factor integrante, entonces

$$\nu(df + gdu) = dh(f,u) = 0, \tag{1.218}$$

y, expresando h en términos de x, y, u, la solución se escribe

$$F(x,y,u) = K. \tag{1.219}$$

Dado que

$$\rho(Pdx + Qdy + Rdu) = df + gdu, \tag{1.220}$$

la función $F(x,y,u) = K$ es solución de (1.205).

Observación: esta parte de la demostración provee un método de integración para la ecuación (1.205).

Ejemplo 14. Como aplicación de la anterior proposición, consideremos la ecuación

$$y^2dx - udy + ydu = 0, \tag{1.221}$$

que cumple con la condición de integrabilidad (1.206).

Haciendo por ejemplo, x constante es

$$ydu - udy = 0, \tag{1.222}$$

e integrando se obtiene

$$f(x,y,u) = lnu - lny = C, \tag{1.223}$$

con $\rho = 1/yu$ y $g = y/u = e^{-f}$.
Resolviendo

$$df + gdx = df + e^{-f}dx = 0$$

resulta

$$e^f + x = K$$

y de allí, la solución de la ecuación,

$$F(x, y, u) = \frac{u}{y} + x = K. \tag{1.224}$$

Para presentar el *método de Lagrange-Charpit* para obtener integrales completas resulta útil la siguiente proposición.

Proposición 1.3 Sean $F(x, y, u, p, q) = 0$ una EDP y $g(x, y, u, p, q, a) = 0$ una solución del sistema característico con la condición

$$\frac{\partial(F, g)}{\partial(p, q)} \neq 0.$$

Si de $F = 0$ y $g = 0$ se obtienen $p = p(x, y, u, a)$ y $q = q(x, y, u, a)$, entonces se verifica que

$$p_y + qp_u = q_x + pq_u. \tag{1.225}$$

Demostración: Derivando respecto de x y de y a

$$F(x, y, u, p(x, y, u, a), q(x, y, u, a)) = 0,$$

y

$$g(x, y, u, p(x, y, u, a), q(x, y, u, a)) = 0,$$

se obtienen

$$\begin{aligned} F_x + F_u p + F_p(p_x + p_u p) + F_q(q_x + q_u p) &= 0, \\ g_x + g_u p + g_p(p_x + p_u p) + g_q(q_x + q_u p) &= 0, \\ F_y + F_u q + F_p(p_y + p_u q) + F_q(q_y + q_u q) &= 0, \\ g_y + g_u q + g_p(p_y + p_u q) + g_q(q_y + q_u q) &= 0, \end{aligned} \tag{1.226}$$

y multiplicando respectivamente por g_p, $-F_p$, g_q, $-F_q$ y sumando resulta

$$(F_p g_q - F_q g_p)\,[p_y + p_u q - (q_x + q_u p)] =$$

$$= -(F_x + F_u p)g_p + (g_x + g_u p)F_p - (F_y + F_u q)g_q + (g_y + g_u q)F_q. \tag{1.227}$$

Pero en virtud de $g(x, y, u, p, q, a) = 0$ es

$$g_x dx + g_y dy + g_u du + g_p dp + g_q dq = 0, \tag{1.228}$$

de donde, reemplazando cada diferencial por el denominador respectivo del sistema característico asociado a F, se deduce que el segundo miembro de (1.227) es nulo.

Por lo tanto, y dado que el primer factor en el primer miembro de (1.227) es

$$\frac{\partial(F,g)}{\partial(p,q)} \neq 0,$$

se concluye que es nulo el segundo factor, lo que completa la demostración.

Método de Lagrange-Charpit

Teorema 1.7 *Una solución completa de la EDP* $F(x,y,u,p,q) = 0$ *es la solución general de*

$$du = pdx + qdy, \tag{1.229}$$

donde p *y* q *se obtienen de* $F(x,y,u,p,q) = 0$ *y de una integral del sistema característico.*

Demostración: Sea

$$g(x,y,u,p,q,a) = 0 \tag{1.230}$$

una integral del sistema característico asociado a $F(x,y,u,p,q) = 0$; si se verifica que $\frac{\partial(F,g)}{\partial(p,q)} \neq 0$, de (1.230) y de la EDP pueden obtenerse $p = p(x,y,u,a)$ y $q = q(x,y,u,a)$. La ecuación

$$du = p(x,y,u,a)dx + q(x,y,u,a)dy \tag{1.231}$$

es completamente integrable pues cumple con la condición $p_y + qp_u = q_x + pq_u$ (proposiciones 1.2 y 1.3).
Por lo tanto, la solución general de esta EDO es una solución completa de la EDP.
Este teorema proporciona un método para la obtención de una integral completa que se conoce como *método de Lagrange-Charpit*.

Ejemplo 15. Hallaremos una integral completa de la ecuación

$$2uu_y^2 - y^2u_x + y^2u_y = 0. \tag{1.232}$$

El sistema característico asociado a $F(x,y,u,p,q) = 2uq^2 + y^2(q-p) = 0$ es

$$\frac{dx}{-y^2} = \frac{dy}{y^2 + 4uq} = \frac{du}{2uq^2} = -\frac{dp}{2pq^2} = -\frac{dq}{2y(q-p) + 2q^3}. \tag{1.233}$$

e integrando respecto a u y a p se obtiene

$$pu = a, \tag{1.234}$$

y de la EDP resulta

$$q = \frac{-y^2 \pm y\sqrt{y^2+8a}}{4u}. \tag{1.235}$$

Reemplazando p y q en

$$du = pdx + qdy, \tag{1.236}$$

se tiene que

$$4u\,du = 4a\,dx - y^2\,dy \pm y\sqrt{y^2+8a}\,dy, \tag{1.237}$$

e integrando

$$4a\,x - \frac{y^3}{3} \pm \frac{1}{3}\left(y^2+8a\right)^{3/2} - 2u^2 = b. \tag{1.238}$$

Finalmente, racionalizando se obtiene la integral completa:

$$(6u^2 - 12a\,x + y^3 + b)^2 = (y^2+8a)^3. \tag{1.239}$$

El teorema que sigue permite determinar una solución completa para EDP de forma particular. Para su demostración utilizaremos el método de Lagrange-Charpit.

Teorema 1.8 *i) Una solución completa de* $F(p,q)=0$ *es*

$$u = ax + f(a)y + b, \tag{1.240}$$

donde $f(a)=q$.

ii) Una solución completa de $F(u,p,q)=0$ *es la solución general de*

$$F\left(g, \frac{dg}{dv}, a\frac{dg}{dv}\right) = 0, \tag{1.241}$$

con

$$v = x + ay + b \quad u(x,y) = g(v). \tag{1.242}$$

iii) Una solución completa de $u = xp + yq + f(p,q)$ *es*

$$u = ax + by + f(a,b). \tag{1.243}$$

Demostración:

i) Si $F(p,q)=0$, es $F_x = F_y = F_u = 0$ y el sistema característico

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{du}{pF_p+qF_q} = -\frac{dp}{F_x+pF_u} = -\frac{dq}{F_y+qF_u}, \tag{1.244}$$

conduce a $dp = dq = 0$, es decir p y q constantes.
Luego, con $p = a$ y $q = f(a)$ obtenido a partir de $F(a, q) = 0$, resulta la solución completa:

$$u = ax + f(a)y + b. \tag{1.245}$$

ii) Para una ecuación de la forma $F(u, p, q) = 0$, es $F_x = F_y = 0$. De los dos últimos miembros del sistema característico resulta que $q = ap$.
Combinando este resultado con la EDP, se obtienen p y q en términos de u

$$p = f(u), \quad q = af(u), \tag{1.246}$$

y, en virtud de (1.229) es

$$\int \frac{du}{f(u)} = x + ay + b, \tag{1.247}$$

y u es función de la combinación $x + ay + b$.
Al proponer $u(x, y) = g(x + ay + b) = g(v)$, la EDP se transforma en una EDO de primer orden

$$F\left(g, \frac{dg}{dv}, a\frac{dg}{dv}\right) = 0, \tag{1.248}$$

cuya solución general contiene la constante arbitraria a y una segunda constante de integración b y provee así una solución completa de la EDP.

iii) Para una EDP de la forma

$$u = xp + yq + f(p, q), \tag{1.249}$$

es $F_x + pF_u = F_y + qF_u = 0$ y del sistema característico se obtienen $p = a$, $q = b$ constantes; reemplazando en la diferencial (1.229) e integrando resulta la solución completa:

$$u = ax + by + f(a, b). \tag{1.250}$$

Ejemplo 16. Para la EDP

$$u_x^3 - 2u_xu_y + 3u_y = 5 \tag{1.251}$$

se tiene $p = a$, y de la ecuación es $q = (5 - a^3)/(3 - 2a)$; entonces

$$u = ax + \left(\frac{5 - a^3}{3 - 2a}\right) y + b. \tag{1.252}$$

Ejemplo 17. En la EDP

$$u^2(u_x^2 + u_y^2 + 1) = 1 \tag{1.253}$$

la sustitución $v = x + ay + b$ conduce a la EDO

$$(1 + a^2)\left(\frac{dg}{dv}\right)^2 + 1 \;=\; \frac{1}{g^2}, \tag{1.254}$$

es decir

$$\frac{\sqrt{1 + a^2}\, g\, dg}{\sqrt{1 - g^2}} \;=\; \pm dv, \tag{1.255}$$

y la integral completa buscada es

$$(1 + a^2)\,(1 - u^2) \;=\; (x + ay + b)^2. \tag{1.256}$$

Ejemplo 18. Para la EDP

$$u = xu_x + yu_y + u_x^2 - u_y^2 \tag{1.257}$$

se obtiene en forma inmediata la integral completa

$$u = ax + by + a^2 - b^2. \tag{1.258}$$

El método de Lagrange-Charpit propone obtener p y q de la EDP y de una integral del sistema característico, para luego obtener una solución completa como la solución general de (1.229):

$$du = pdx + qdy.$$

Sin embargo, se pueden obtener ambas p y q, de dos integrales del sistema característico y reemplazarlas en la diferencial para obtener la solución completa. De hecho, en algunos casos es éste el camino más conveniente, tal como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 19. Para la EDP

$$xu_x^3 + yu_y^3 + u_x - u = 0 \tag{1.259}$$

el sistema característico asociado es

$$\frac{dx}{3xp^2+1}=\frac{dy}{3yq^2}=\frac{du}{3xp^3+p+3yq^3}=-\frac{dp}{p^3-p}=-\frac{dq}{q^3-q}. \qquad (1.260)$$

Integrando el 2° y 5° término, y el 4° y 5°, se obtienen

$$\begin{aligned} 3y(q^2-1)^{3/2} &= a \\ b\frac{(q^2-1)}{q^2} &= \frac{(p^2-1)}{p^2}. \end{aligned} \qquad (1.261)$$

De aplicarse el método de Lagrange-Charpit, cualquiera de estas funciones reemplazadas en la EDP conduce a una ecuación algebráica de tercer grado. En cambio, llevando ambas integrales a la EDP, resulta la solución completa

$$\begin{aligned} (9y^2+a^2)^{3/2}\left\{x\pm\frac{[9y^2+a^2(1-b)]^{3/2}}{27}\right\} &+ \\ +[9y^2+a^2(1-b)]\sqrt{9y^2+a^2}-[9y^2+a^2(1-b)]^{3/2}u &= 0 \end{aligned} \qquad (1.262)$$

Método de variables separables

Para una EDP de la forma

$$F(x,p)=G(y,q) \qquad (1.263)$$

se propone como solución $u=f(x)+g(y)$, lo que provee dos EDO. En efecto, se tiene

$$F(x,f'(x))=G(y,g'(y))=a, \qquad (1.264)$$

y despejando de ellas $f'(x)$ y $g'(y)$ e integrando resulta la solución completa

$$u=f(x,a)+g(y,a)+b. \qquad (1.265)$$

Ejemplo 20. La ecuación para el problema de los dos cuerpos de la mecánica es

$$u_x^2+u_y^2=\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}-h \qquad (1.266)$$

con k y h constantes. Trataremos de transformarla de modo que resulte una ecuación de variables separables.

Pasando a coordenadas polares con $x = rcos\theta$, $y = rsen\theta$,

$$u(x,y) = u(r\,cos\theta, r\,sen\theta) = v(r,\theta), \tag{1.267}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 &= v_r^2\,(r_x^2 + r_y^2) \,+\, v_\theta^2\,(\theta_x^2 + \theta_y^2) \,+\, 2v_r v_\theta\,(r_x\theta_x + r_y\theta_y) \\ &= \frac{k}{r} - h. \end{aligned} \tag{1.268}$$

Teniendo en cuenta que

$$r_x = \frac{x}{r}, \quad r_y = \frac{y}{r}, \quad \theta_x = -\frac{y}{r^2}, \quad \theta_y = \frac{x}{r^2}, \tag{1.269}$$

es

$$v_r^2 \,+\, \frac{v_\theta^2}{r^2} \,=\, \frac{k}{r} \,-\, h \tag{1.270}$$

y entonces

$$r^2\,v_r^2 \,-\, rk \,+\, hr^2 \,=\, -v_\theta^2, \tag{1.271}$$

que es de variables separables. Proponiendo

$$v = f(r) + g(\theta) \tag{1.272}$$

obtenemos

$$r^2 f'^2 - rk + hr^2 = -g'^2 = -a^2, \tag{1.273}$$

es decir

$$f'(r) = \pm\sqrt{\frac{rk - a^2 - hr^2}{r^2}}, \qquad g'(\theta) = a. \tag{1.274}$$

La solución completa es

$$v(r,\theta) \,=\, \int_1^r \sqrt{\frac{rk - a^2 - hr^2}{r}}\;dr \,+\, a\theta \,+\, b, \tag{1.275}$$

o bien

$$u(x,y) = \int_1^{\sqrt{x^2+y^2}} \sqrt{\frac{rk - a^2 - hr^2}{r^2}}\;dr \,+\, a\,arctg\left(\frac{y}{x}\right) \,+\, b. \tag{1.276}$$

Método de Jacobi

Este método es una suerte de generalización del método de Lagrange-Charpit y su demostración es muy semejante a la de aquél, por lo que será apenas esbozada en esta sección.

Sea $v = v(x, y, u) = C$ una solución de la EDP $F(x, y, u, p, q) = 0$. Adoptando la notación $v_1 = v_x$, $v_2 = v_y$, $v_3 = v_u$, de $v_x + v_u p = 0$ y $v_y + v_u q = 0$, se obtienen

$$p = -\frac{v_1}{v_3}$$

y

$$q = -\frac{v_2}{v_3}, \tag{1.277}$$

y reemplazando estos valores en la EDP dada, resulta la ecuación

$$G(x, y, u, v_1, v_2, v_3) = 0, \tag{1.278}$$

cuyo sistema característico es

$$\frac{dx}{G_{v_1}} = \frac{dy}{G_{v_2}} = \frac{du}{G_{v_3}} = \frac{dv}{v_1 G_{v_1} + v_2 G_{v_2} + v_3 G_{v_3}} =$$

$$= \frac{-dv_1}{G_x + v_1 G_v} = \frac{-dv_2}{G_y + v_2 G_v} = \frac{-dv_3}{G_u + v_3 G_v}. \tag{1.279}$$

Pero, en este caso es $dv = 0$ (pues $v = C$) y $G_v = 0$, y el sistema se reduce a

$$\frac{dx}{G_{v_1}} = \frac{dy}{G_{v_2}} = \frac{du}{G_{v_3}} = \frac{-dv_1}{G_x} = \frac{-dv_2}{G_y} = \frac{-dv_3}{G_u}. \tag{1.280}$$

Si $f(x, y, u, v_1, v_2, v_3, a) = 0$ y $g(x, y, u, v_1, v_2, v_3, b) = 0$ son dos soluciones cualesquiera de este sistema y es

$$\frac{\partial(G, f, g)}{\partial(x, y, u)} \neq 0,$$

pueden hallarse $v_i(x, y, u)$, con $i = 1, 2, 3$ y con ellas formarse

$$dv = v_1\, dx + v_2\, dy + v_3\, du = 0 \tag{1.281}$$

que resulta una diferencial exacta cuya solución es $v(x, y, u) = C$.

Ejemplo 21. Obtendremos nuevamente una solución completa de $u_x^2 + u_y^2 = 4u$, ahora empleando el método de Jacobi.

Para ello escribimos

$$G = v_1^2 + v_2^2 - 4uv_3^2 = 0$$

y su sistema característico

$$\frac{dx}{v_1} = \frac{dy}{v_2} = \frac{du}{-4uv_3} = -\frac{dv_1}{0} = -\frac{dv_2}{0} = \frac{dv_3}{2v_3^2}, \tag{1.282}$$

de donde resultan

$$v_1 = a, \quad v_2 = b, \tag{1.283}$$

y de $G = 0$

$$v_3 = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4u}}. \tag{1.284}$$

Luego de

$$dv = a\,dx + b\,dy + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}\,\frac{du}{\sqrt{u}} = 0 \tag{1.285}$$

obtenemos

$$v = ax + by + \sqrt{a^2 + b^2}\,\sqrt{u} = C \tag{1.286}$$

y, tomando $C = 1$,

$$u = \frac{(1 - ax - by)^2}{a^2 + b^2}. \tag{1.287}$$

Ejemplo 22. Resolveremos la EDP

$$(u_x - u)(u_y - u)(u_z - u) = u_x u_y u_z. \tag{1.288}$$

Tomando $p = -v_1/v_4$, $q = -v_2/v_4$, y $r = -v_3/v_4$, obtenemos

$$G = (v_1 + uv_4)(v_2 + uv_4)(v_3 + uv_4) - v_1 v_2 v_3 = 0, \tag{1.289}$$

cuyo sistema característico

$$\frac{dx}{(v_2 + uv_4)(v_3 + uv_4) - v_2 v_3} = \frac{dy}{(v_1 + uv_4)(v_3 + uv_4) - v_1 v_3} =$$

$$\frac{dz}{(v_1+uv_4)(v_2+uv_4)-v_1v_2} = \frac{du}{u[(v_2+uv_4)(v_3+uv_4)+(v_1+uv_4)(v_3+uv_4)+(v_1+uv_4)(v_2+uv_4)]} = -\frac{dv_1}{0} = -\frac{dv_2}{0} = -\frac{dv_3}{0} = \frac{-dv_4}{v_4[(v_2+uv_4)(v_3+uv_4)+(v_1+uv_4)(v_3+uv_4)+(v_1+uv_4)(v_2+uv_4)]} \tag{1.290}$$

nos permite concluir que

$$v_1 = a_1, \;\; v_2 = a_2, \;\; v_3 = a_3, \;\; uv_4 = a_4. \tag{1.291}$$

Observemos, a partir de la EDP, que las constantes a_i deben satisfacer la relación

$$(a_1 + a_4)\,(a_2 + a_4)\,(a_3 + a_4) \; = \; a_1 a_2 a_3. \tag{1.292}$$

Dado que

$$dv \; = \; v_1\,dx + v_2\,dy + v_3\,dz + v_4\,du \; = \; 0$$

tenemos

$$a_1\,x + a_2\,y + a_3\,z + a_4\,ln(u) \; = \; C, \tag{1.293}$$

donde sin pérdida de generalidad podemos tomar $a_4 = 1$, y obtenemos la integral completa

$$u \; = \; \exp{(C - a_1 x - a_2 y - a_3 z)}, \tag{1.294}$$

con las constantes arbitrarias a_i, $i = 1, 2, 3$, sujetas a la relación

$$(a_1 + 1)\,(a_2 + 1)\,(a_3 + 1) \; = \; a_1 a_2 a_3. \tag{1.295}$$

1.8 Problemas propuestos

1- Resolver:
a)

$$a\,u_x \; + \; b\,u_y \; = \; 0,$$

con a y b constantes;
b)

$$x\,u_x \; + \; y\,(1-x)\;u_y \; = \; 0.$$

2- Resolver los problemas con las condiciones **a)** y **b)** para la ecuación:

$$2\,u_x \; - \; 3\,u_y \; = \; 4.$$

a)

$$u(x,1) \,=\, 2x+1,$$

b)

$$u(x,x) \,=\, e^x.$$

Verificar las soluciones.

3- Hallar la integral general de:

a)

$$(x+a)u_x + (y+b)u_y = u + c$$

b)

$$u_x - u_y = ln(x+y)$$

c)

$$x^2u_x - y^2u_y - (x-y)u$$

d)

$$(x+y)(xu_x - yu_y) = (x-y)u$$

e)

$$x_yu_x - x^2u_y + yu = 0$$

f)

$$xx_u + 2xu_y = (x-y)u$$

g)

$$xp + yq + zr = xyz,$$

con $u = u(x,y,z)$ y $r = u_z$.

4-¿Qué función es igual a la suma de sus derivadas parciales primeras?

5-a) Hallar algún factor integrante para que la EDO

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

sea exacta.
b) Analizar el caso en que $N = cte$ y $M = a(x)y + b(x)$.

6- Resolver el problema de valor inicial para la ecuación de onda unidimensional amortiguada:

$$u_t \;+\; c\,u_x \;+\; \lambda\,u \;=\; 0,$$

con la condición inicial

$$u(x,0) \;=\; F(x), \text{ y } \lambda > 0.$$

7- Hallar la superficie integral de

$$xu_y - yu_x = 0,$$

que pasa por la curva

$$x = 0, u = y^2.$$

8- Hallar la superficie integral de

$$u_x - 2xu_y = 0,$$

que pasa por la curva

$$x = 1, u = y^2.$$

9- Resolver:

$$2u_x - 3u_y = 6.$$

con la condición inicial

$$u(x, x) = e^x.$$

10- Resolver:

$$x^2u_x - xyu_y = y(u^2x)$$

con la condición inicial

$$u(x, x) = x - 1.$$

11- Resolver:

$$u_t + u\,u_x = 0,$$

con la condición inicial

$$u(x, 0) = 1 - x^2.$$

12- Resolver el problema de valor inicial para la ecuación de la onda cuasi-lineal amortiguada dado por

$$u_t + u\,u_x + c\,u = 0,$$
$$u(x, 0) = 1 + x.$$

13- Resolver:

$$u_t + c\,u_x + u^2 = 0,$$

con la condición inicial

$$u(x, 0) = x.$$

14- Resolver:

$$y^2\,u_x - xy\,u_y = x\,(u - 2y),$$

con la condición inicial

$$u(x, x) = x - 1.$$

15- Hallar la superficie integral de

$$x^2\,u_x + y^2\,u_y + u^2 = 0,$$

que contiene a la curva $xy = x + y, \; u = 1$.

16- Hallar la superficie integral de

$$u\,(x\,u_x \,-\, y\,u_y) \,=\, y^2 \,-\, x^2,$$

que contiene a la curva $y = x - 1, \;\; u = x,$ para $1 < x < 2$.

17- Hallar la integral general de las siguientes ecuaciones cuasi-lineales:
a)

$$yuu_x - xuu_y = xy(x^2 + y^2)$$

b)

$$(x - u)u_x + (u - y)u_y = 0$$

c)

$$(2u - y)u_x + (x + u)u_y + 2x + y = 0$$

d)

$$(y - u)u_x + (u - x)u_y = x - y$$

e)

$$x(y - u)u_x + y(u - x)u_y = u(x - y)$$

f)

$$x(u^2 - y^2)u_x + y(x^2 - u^2)u_y = u(y^2 - x^2)$$

18- Resolver:

$$u_t + uu_x = 0$$

$$u(x, 0) = x^2.$$

19- Resolver la ecuación de onda cuasi-lineal amortiguada,

$$u_t + uu_x + cu = 0,$$

con

$$u(x, 0) = 2x + 1.$$

20- Resolver:

$$u_t + cu_x + u^2 = 0$$

con

$$u(x, 0) = x.$$

21- Resolver:

$$u_x + u^2u_y = 1$$

con

$$u(x, x/3) = 1.$$

22- Resolver:

$$yuu_x + u_y = 0$$

con

$$u(x, x) = x^2.$$

23- Resolver:

$$x^2 u_x + y^2 u_y + u^2 = 0$$

con

$$\begin{cases} xy = x + y \\ u = 1 \end{cases}$$

24- Hallar el cono de Monge para
a)

$$u_x{}^2 u_y = 1;$$

b)

$$u_x{}^2 + u_y = y;$$

c)

$$uu_x + yu_y = x.$$

25- Demostrar que las franjas características de $p^2 = q$ que pasan por el origen $(x = y = u = 0)$ generan el cono $4yu = -x^2$.

26- Resolver:

$$u_x{}^2 + u_y = 0,$$

con las condiciones iniciales:
a) $u(x, 0) = ax$,
b) $u(x, 0) = -x^2$.

27- Resolver:

$$u_x{}^2 u_y = 1,$$

si $u(x, 0) = x$.

28- Resolver:

$$u_x{}^2 + u_y = y,$$

con $u(x, 0) = 0$.

29- Hallar dos soluciones de

$$u = \frac{1}{2}({u_x}^2 + {u_y}^2) + (u_x - x)(u_y - y)$$

que pasen por el eje x, es decir tales que $u(x, 0) = 0$.

30- Resolver:

$${u_x}^2 + {u_y}^2 = 4u,$$

con $u(0, y) = y^2$.

31- Resolver:

$$u_y = {u_x}^3,$$

si $u(x, 0) = 2x^{\frac{3}{2}}$.

32- Hallar la solución implícita de

$$x^4 {u_x}^2 + y^2 u_y = 0,$$

si $u(x, 1) = x$.

33-a) Hallar la EDP cuya solución completa es

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + u^2 = 1.$$

b) Hallar la solución singular.
c) Obtener otra solución diferente de las anteriores.
d) Hallar la solución que contiene a $u(x, 1) = 1$.

34- Hallar la solución de

$$({u_x}^2 + {u_y}^2 + 1)u^2 = 1$$

que verifique $u(x, x + 1) = 1$, a partir de la solución completa:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + u^2 = 1.$$

35-a) Hallar la EDP cuya solución completa es

$$u(x, y) = ax + by + 3a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}.$$

b) Hallar si existe la solución singular.
c) Hallar la solución que verifique $u(x, 0) = x$.

36- Hallar, si existe, la solución singular de

a)

$$u_x{}^2 + u_y = y,$$

b)

$$u = \frac{1}{2}(u_x{}^2 + u_y{}^2) + (u_x - x)(u_y - y).$$

37- Hallar la solución completa por el método de Lagrange-Charpit de

$$2(u + xu_x + yu_y) = yu_x{}^2.$$

38- Hallar la solución completa de

$$u_x{}^2 + yu_y - u = 0,$$

a) utilizando el último término del sistema característico;
b) utilizando el $1°$ y $4°$ términos del sistema característico.
c) Hallar la solución que pase por $u(x, 1) = 1$.

39- Hallar la solución completa y la singular de

$$(u_x{}^2 + u_y{}^2)y = uu_y.$$

40- Hallar la solución completa de

$$u_x u_y + u_y x = y.$$

41- Sabiendo que la familia biparamétrica de planos tangentes a la esfera unidad

$$u = \frac{-a}{\sqrt{1 - (a^2 + b^2)}} \quad x - \frac{b}{\sqrt{1 - (a^2 + b^2)}} \quad y + \frac{1}{\sqrt{1 - (a^2 + b^2)}}$$

es una solución completa de la EDP:

$$u - u_x x - u_y y = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2},$$

hallar la superficie integral que contiene a la curva

$$u = 1, \quad x = \frac{1}{2}\cos\theta, \quad y = \frac{1}{2}\sin\theta; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

42- Hallar la solución $u(x, y)$ de $u_x^2 + u_y^2 = 1$ que toma el valor u_o sobre

$$ax + by = 0, \quad a, b > 0$$

43- Resolver $u_x^2 + u_y = 0$ con las condiciones iniciales:
a)

$$u(x,0) = ax,$$

b)

$$u(x,0) = -x^2.$$

44- Resolver $u_x^2\, u_y = 1$ con la condición inicial $u(x,0) = x$.

45- Resolver $u_x^2 + u_y = y$ con la condición inicial $u(x,0) = 0$.

46- Hallar dos soluciones de

$$u = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) + (p - x)(q - y)$$

que pasen por el eje x $(u(x,0) = 0)$.

47- Hallar la solución de $p^2 + q^2 = 4u$ con la condición inicial $u(0,y) = y^2$.

48- Resolver $x^4 p^2 q = 0$ con la condición inicial $u(x,1) = x$ (obtener la solución en forma implícita).

49- a) Hallar la EDP cuya solución completa es

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + u^2 = 1.$$

b) Hallar la solución singular.
c) Hallar otra solución diferente de las anteriores.
d) Hallar la solución que contiene a $u(x,1) = 1$.

50- Hallar la solución de $(p^2 + q^2 + 1)u^2 = 1$ que verifique $u(x, x+1) = 1$, a partir de la solución completa $(x - a)^2 + (y - b)^2 + u^2 = 1$.

51- a) Hallar la EDP cuya solución completa es:

$$u = ax + by + 3a^{1/3}b^{1/3}.$$

b) Hallar si existe la solución singular.
c) Hallar la solución que verifique $u(x,0) = x$.

52- Hallar, si existe, la solución singular de:

a)

$$u_x^2 + u_y = y;$$

b)

$$u = \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2) + (u_x - x)(u_y - y).$$

53- Hallar una integral completa para cada una de las ecuaciones no lineales dadas. Hallar las soluciones singulares que puedan existir.

a)
$$u_x^2 + u_y^2 = 4$$

b)
$$u_x u_y = k$$

c)
$$9(u_x^2 u + u_y^2) = 4$$

d)
$$u_x^2 = 2uu_y + u^2$$

e)
$$u^2 u_y^2 = u_x$$

f)
$$u^2 u_y^2 = u_x$$

g)
$$u^2 u_2 u_y + u(u_x + u_y) = 1$$

h)
$$u = xu_x + yu_y + (\alpha u_x^2 + \beta u_y^2 + \gamma)^{1/2}$$

i)
$$u = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + f(p_1, p_2, p_3)$$

j)
$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + (n+1)(p_1 p_2 ... p_n)^{\frac{1}{(n+1)}}$$

54- Hallar la solución completa de:

a)
$$2(u + xu_x + yu_y) = yu_x^2$$

b)
$$(u_x^2 + u_y^2)_y = uu_y$$

c)
$$u_y(u_x + x) = y$$

55- Hallar la solución completa de:
$$u_x^2 + yu_y - u = 0$$

a) utilizando el último término del sistema característico;
b) utilizando $1°$ y $4°$ término;
c) utilizando $2°$ y $4°$ término;
d) hallar la solución que pasa por $u(\tau, 1) = \tau$;

e) hallar la solución singular.

56- Hallar la solución completa por el método de separación de variables para las ecuaciones:
a)
$$u_x - u_y = x^2 + y^2$$
b)
$$u_x^2 + u_y^2 = x + y$$
c)
$$\sqrt{u_x} - \sqrt{u_y} + 3x = 0$$
d)
$$u_x^2 - y^3 u_y = x^2 - y^2$$
e)
$$u_y = x u_x + u_x^2$$

57- Mostrar que una ecuación de la forma:

$$f(u_x, x) = g(u_y, y)$$

carece de integral singular.

58- Hallar la solución completa por separación de variables de
a)
$$u_x - u_y = x^2 + y^2;$$
b)
$$(1 - y^2) x {u_y}^2 + y^2 u_x = 0;$$
c)
$${u_x}^{\frac{1}{2}} - {u_y}^{\frac{1}{2}} + 3x = 0.$$

59- Hallar la solución de

$$u_y = x u_x + {u_x}^2$$

por el método de Lagrange-Charpit, utilizando el 2° y 4° términos del sistema característico.

60- Resolver por el método de Jacobi las EDP:
a)
$$u {u_x}^2 - y^2 u_x + y^2 u_y = 0;$$
b)
$$({u_x}^2 + {u_y}^2) y = u u_y.$$

c)

$$yu_xu_y - 3z^2u_x^2 + u_z - 4 = 0$$

d)

$$u_xx^2 = u_y^2 + au_z^2$$

e)

$$u_xu_yu_z = u_xx + u_yy + u_zz$$

f)

$$u^2 + uu_z = u_x^2 + u_y^2$$

Soluciones a los problemas propuestos

1-a

$$u(x, y) = K(bx - ay)$$

1-b

$$u(x, y) = K(e^{-x}x/y)$$

2-a

$$u(x, y) = 2x + 1$$

2-b

$$u(x, y) = 4(x - y)/5 + e^{(3x+2y)/5}$$

3-a

$$\Phi\left(\frac{y+b}{x+a}, \frac{u+c}{x+a}\right) = 0$$

3-b

$$\Phi\left(y + x, u - x\ln x + y\right) = 0$$

3-c

$$\Phi\left(\frac{y+x}{xy}, \frac{u}{x+y}\right) = 0$$

3-d

$$\Phi\left(xy, \frac{u}{x+y}\right) = 0$$

3-e

$$\Phi\left(y^2 + x^2, xu\right) = 0$$

3-f

$$\Phi\left(\frac{y}{x^2}, 2\ln u - 2x - y\right) = 0$$

3-g

$$\Phi\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}, xyz - 3u\right) = 0$$

4-

$$u(x,y) = e^x\,\Phi(y-x),\quad u(x,y) = e^y\,\Phi(y-x)$$

6-

$$u(x,t) = e^{-\lambda t}\,F(x-ct)$$

7-

$$u(x,y) = x^2 + y^2$$

8-

$$u(x,y) = (y - x^2 + 1)^2$$

9-

$$u(x,y) = 6(x+y) + e^{3x-2y}$$

10-

$$u(x,y) = x - \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2x^2}}$$

11-

$$u(x,t) = 1 - \left[\frac{1-\sqrt{1-4t(x-t)}}{2t}\right]^2$$

12-

$$u(x,t) = \frac{c(x+1)e^{-ct}}{1+c-e^{-ct}}$$

13-

$$u(x,t) = \frac{x-ct}{t(x-ct)+1}$$

14-

$$u(x,y) = y - \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2y^2}}$$

15-

$$\frac{1}{u} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2y}$$

16-

$$u^2 = -x^2 - y^2 + \frac{3}{8}(1+\sqrt{1-4xy})^2 - \sqrt{1-4xy}$$

17-a

$$\Phi(x^2 + y^2, u^2 - x^4 - x^2y^2) = 0$$

17-b

$$\Phi((x - u)(u - y), u) = 0$$

17-c

$$\Phi(u - x + 2y, x^2 + y^2 + u^2) = 0$$

17-d

$$\Phi(u + x + y, x^2 + y^2 + u^2) = 0$$

17-e

$$\Phi(u + x + y, xyu) = 0$$

17-f

$$\Phi(u^2 + x^2 + y^2, xyu) = 0$$

18-

$$u(x,t) = \frac{1 - 2tx - \sqrt{1 + 4tx}}{2t^2},\ si\ t \neq 0; \quad u(x,0) = x^2$$

19-

$$u(x,t) = \frac{c(2x+1)}{(2+ct)e^{ct} - 2}$$

20-

$$u(x,t) = \frac{x - ct}{t(x - ct) + 1}$$

21-

$$u^3 - u + x - 3y = 0$$

22-

$$u^{5/3} - uy^2 + 2x = 0$$

23-

$$u(x,y) = \frac{2xy}{3xy - x - y}$$

24-a

$$4(u - u_0)^3 = 27(x - x_0)^2(y - y_0)$$

24-b

$$4(y - y_0)(u - u_0) = (x - x_0)^2 + 4y_0(y - y_0)^2$$

24-c

$$(u-u_0)/x_0=(x-x_0)/u_0=(y-y_0)/y_0$$

26-a

$$u(x,y)=a(x-ay)$$

26-b

$$u(x,y)=\frac{x^2}{(4y-1)}$$

27-

$$u(x,y)=x+y$$

28-

$$u(x,y)=y^2/2$$

29-

$$u_1(x,y)=y^2/2; \quad u_2(x,y)=(4xy-3y^2)/2$$

30-

$$u(x,y)=y^2$$

31-

$$u(x,y)=\frac{2x^{3/2}}{\sqrt{1-27y}}$$

32-

$$uy=-\tau^4+(\tau+\tau^4)y; \quad u=\tau^2x^3/6+\tau-\tau^5/6$$

33-a

$$u^2(p^2+q^2+1)=1$$

33-b

$$u^2=1$$

33-c Proponer una relación arbitraria entre a y b; por ejemplo tomando $a=b$ resulta

$$(x-y)^2+2u^2=2$$

33-d

$$u(x,y)=\sqrt{1-(y-1)^2}$$

34-

$$(x-y+1)^2+2u^2=2$$

35-a

$$u=px+qy+3p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}$$

35-b

$$u = 1/xy$$

35-c

$$u = x$$

36-a No existe
36-b

$$u = x^2/2 = y^2/2$$

37-

$$u(x,y) = \frac{ax}{y^2} - \frac{a^2}{4y^3} + \frac{b}{y}$$

38-a

$$u(x,y) = x^2/4 + bx + b^2 + ay$$

38-b

$$u(x,y) = (x/2 + a)^2 + by$$

38-c

$$u(x,y) = y(1 + x - y)$$

39-

$$a^2u^2 = (a^2x + b)^2 + a^4y^2; \quad u = 0$$

40-

$$u = \frac{-x^2}{2} + ax + \frac{y^2}{2a} + b$$

43-a

$$u(x,y) = a(x - ay)$$

43-b

$$u(x,y) = \frac{-x^2}{1 - 4y}$$

44-

$$u(x.y) = x + y$$

45-

$$u(x,y) = y^2/2$$

47-

$$u(x,y) = y^2$$

49-a

$$(p^2 + q^2 + 1)u^2 = 1$$

49-b

$$u^2 = 1$$

49-c Tomando por ejemplo $a = b$ se obtiene una solución distinta como la envolvente de la familia monoparamétrica resultante:

$$(x - y)^2 + 2x^2 = 2$$

49-d

$$u^2 + (y - 1)^2 = 1$$

50-

$$2u^2 + (x - y + 1)^2 = 2$$

51-a

$$u = ap + bq + 3p^{1/3}q^{1/3}$$

51-b

$$u(x, y) = 1/xy$$

51-c

$$u(x, y) = x$$

52-a No existe.
52-b

$$u = (x^2 + y^2)/2$$

53-a

$$u = 2(x \cos\alpha + y \sin\alpha] + b$$

53-b

$$u = ax + ky/a + b$$

53-c

$$(u + a^2)^3 = (x + ay + b)^2$$

53-d

$$(\ln u - ax - a^2 y))^2 = (1 + a^2)(x + ay + b)^2$$

Solución singular:

$$u = 0$$

53-e

$$u^3 a^2 = 3(x + ay + b)$$

53-f

$$(au^2 + x + ay + ax + a^2y)^2 = (1 + 6a + a^2)(x + ay + b)^2$$

53-g

$$2u = b + x(x + a) + y(y + a) \pm (x - y)\sqrt{2(x - y)^2 - a^2}/2^{2/3} \pm$$

$$\pm a^2 \ln \left[\sqrt{2}(x - y) + \sqrt{2(x - y)^2 - a^2}\right]^{-1}/2^{2/3}$$

53-h

$$u = ax + by + \sqrt{\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma}$$

solución singular:

$$x^2/\alpha + y^2/\beta + u^2/\gamma = 1$$

53-i

$$u = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + f(a_1, a_2, a_3)$$

la solución singular surge por eliminación de a_i de

$$x_i + \frac{\partial f_i}{\partial a_i} = 0$$

53-j

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i + (n + 1)(a_1...a_n)^{1/(n+1)}$$

Solución singular:

$$ux_1x_2...x_n = (-1)^n$$

54-a

$$u = (4axy + 4y^2b - a^2)/4y^3$$

54-b

$$a^2u^2 = (a^2x + b)^2) + a^4y^2$$

54-c

$$u = (y^2 + 2a^2x - ax^2 + 2ab)/2a$$

55-a

$$u = (x/2 + b)^2 + ay$$

55-b

$$u = (x/2 + b)^2 + ay$$

55-c

$$u = ay(x - ay) + by$$

55-d

$$u = y(1 + x - y)$$

55-e

$$u = 0$$

56-a

$$u = a(x+y) + b + (x^3 - y^3)/3$$

56-b

$$u = [2(x+a)^{3/2} + 2(y-a)^{3/2} + 3b]/3$$

56-c

$$u = 3x^3 - 3ax^2 + a^2(x+y) + b, \quad sia > 3x$$

56-d

$$u = [2a + x\sqrt{x^2+b} + b\ln(x + \sqrt{x^2+4b}) - b/y^2 + 2\ln y]/2$$

56-e

$$u = 4(a+by) - x^2 \pm [x\sqrt{x^2+4b} + 4b\ln(x + \sqrt{x^2+4b})/2$$

58-a

$$u(x,y) = a(x+y) + (x^3+y^3)/3 + b$$

58-b

$$u(x,y) = ax^2/2 + \sqrt{x(y^2-1)} + b$$

58-c

$$u(x,y) = 3x^3 - 3ax^2 + a^2(x+y) + b$$

59-

$$u(x,y) = axe^y + a^2e^{2y}/2 + b$$

60-a

$$u^2 = a(x+y) - a/y + b$$

60-b

$$u^2[a^2y^2 + ((b-ax)^2] = y^2$$

60-c

$$u = ax + blny + (4-ab)z + a^2z^3 + c$$

60-d

$$u = (a_1 + a_2xy + a_3xz + bx)/x, \quad a_2^2 + aa_3^2 + a_1 = 0$$

60-e

$$(u-b)^2 = 4(a_1x + a_2y + a_3z)^3/9, \quad a_1a_2a_3 = 1$$

60-f

$$u = e^{(b-a_1x-a_2y-a_3z)}, \quad a_1^2 + a^2 + a_3 = 1$$

Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden

2.1 EDP lineales de segundo orden con coeficientes constantes

Las EDP lineales de segundo orden pueden ser de tres tipos, según sean los coeficientes de sus derivadas de segundo orden. Ejemplos de estos tres tipos son, como veremos más adelante, la ecuación de ondas o de la cuerda vibrante en una dimensión,

$$u_{tt} - k^2 u_{xx} = f(x,t),$$

la ecuación de difusión o de conducción del calor unidimensional,

$$u_t - k u_{xx} = f(x,t),$$

y la ecuación de Poisson en dos dimensiones,

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y).$$

Para cada tipo de ecuación existe una transformación lineal adecuada que permite llevarla a una forma más simple llamada *forma canónica*. En aquellos casos en los que podemos resolver la ecuación canónica, aplicando la transformación lineal inversa obtenemos la solución a la ecuación original.

2.1.1 Clasificación y formas canónicas

Una EDP lineal de segundo orden con coeficientes constantes es una ecuación de la forma

$$a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + d u_x + e u_y + l u = f(x,y), \tag{2.1}$$

con $a \neq 0$, b, c, d, e, y l constantes.
Para ella establecemos la siguiente clasificación:

- si $b^2 - ac > 0$, la ecuación es *hiperbólica*,
- si $b^2 - ac < 0$, la ecuación es *elíptica*,
- si $b^2 - ac = 0$, la ecuación es *parabólica*.

Para obtener la forma canónica de una EDP definimos la transformación lineal

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= \xi, \\ \gamma x + \delta y &= \eta, \end{aligned} \tag{2.2}$$

con α, β, γ y δ constantes, tales que $\partial(\xi,\eta)/\partial(x,y) \neq 0$, y transformamos la ecuación (2.1), la cual adopta la forma

$$AU_{\xi\xi} + 2BU_{\xi\eta} + CU_{\eta\eta} + DU_{\xi} + EU_{\eta} + LU = F(\xi,\eta), \tag{2.3}$$

con $U(\xi,\eta) = u(x,y)$, y

$$\begin{aligned} A &= a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2, \\ B &= a\alpha\gamma + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\beta\delta, \\ C &= a\gamma^2 + 2b\gamma\delta + c\delta^2, \\ D &= d\alpha + e\beta, \\ E &= d\gamma + e\delta, \\ L &= l. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Los coeficientes de la ecuación original y los de la ecuación transformada verifican

$$B^2 - AC = (b^2 - ac) \left[\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right]^2, \tag{2.5}$$

es decir, que la operación de transformación no altera el tipo de ecuación.
Convendría eligir la transformación (2.2) de modo de eliminar en (2.3) tantos términos en derivadas de segundo orden como sea posible. Ello se consigue resolviendo la ecuación diferencial ordinaria asociada a (2.1):

$$a\,(dy)^2 - 2b\,(dx)(dy) + c\,(dx)^2 = 0, \tag{2.6}$$

llamada *ecuación característica*, que puede escribirse en la forma

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\left(\frac{dy}{dx}\right) + c = 0, \tag{2.7}$$

o bien, con $\lambda = dy/dx$,

$$a\lambda^2 - 2b\lambda + c = 0. \tag{2.8}$$

Si λ_1 y λ_2 son soluciones de (2.8), la ecuación característica (2.6) puede factorearse en la forma

$$(dy - \lambda_1 dx)(dy - \lambda_2 dx) = 0, \tag{2.9}$$

y sus soluciones

$$\begin{aligned} y - \lambda_1 x = c_1, \\ y - \lambda_2 x = c_2, \end{aligned} \tag{2.10}$$

se denominan *rectas características*.
La ecuación característica asociada a la ecuación transformada (2.3) es

$$A\,(d\eta)^2 - 2B\,(d\xi)(d\eta) + C\,(d\xi)^2 = 0, \tag{2.11}$$

y sus soluciones (rectas características) coinciden con las rectas que resultan de transformar las (2.10) según (2.2). Esto sugiere utilizar las características de (2.1) como nuevas coordenadas, pues al utilizar la transformación

$$\begin{aligned} y - \lambda_1 x &= \xi, \\ y - \lambda_2 x &= \eta, \end{aligned} \tag{2.12}$$

las características de la ecuación transformada serán las rectas paralelas a los ejes coordenados ξ y η:

$$\begin{aligned} \xi &= c_1, \\ \eta &= c_2. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Por lo tanto,

- si la ecuación es *hiperbólica*, las raíces de (2.8) son reales y distintas, y de la transformación (2.12) resultan $A = C = 0$, y por (2.5) es $B \neq 0$. Dividiendo (2.3) por $2B$ obtenemos

  $$U_{\xi\eta} + A_1 U_\xi + A_2 U_\eta + A_3 U = H(\xi, \eta), \tag{2.14}$$

  que es la *forma canónica de una ecuación hiperbólica*;

- si la ecuación es *elíptica* las raíces son complejas conjugadas, $\lambda_2 = \lambda_1^*$, y para hallar una forma canónica en el campo real, consideramos la transformación

  $$\begin{aligned} y - \lambda_1 x &= \xi + i\eta, \\ y - \lambda_1^* x &= \xi - i\eta, \end{aligned} \tag{2.15}$$

  que equivale a

  $$y - Re(\lambda_1)x \;=\; \xi$$

$$-Im(\lambda_1)x \quad = \quad \eta, \tag{2.16}$$

y para la cual es $B = 0$, $A = C$, y por (2.5) $A \neq 0$, entonces

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + B_1 U_\xi + B_2 U_\eta + B_3 U = H_1(\xi, \eta), \tag{2.17}$$

es la *forma canónica de una ecuación elíptica*;

- si la ecuación es *parabólica* es $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, y debe redefinirse la transformación. Si $a \neq 0$, podemos tomar la transformación

$$\begin{aligned} y - \lambda x &= \xi, \\ \alpha x &= \eta, \qquad \alpha \neq 0, \end{aligned} \tag{2.18}$$

de donde resultan $A = B = 0$, $C \neq 0$, y

$$U_{\eta\eta} + C_1 U_\xi + C_2 U_\eta + C_3 U = H_2(\xi, \eta), \tag{2.19}$$

que es la *forma canónica de una ecuación parabólica*.

Observación: Se advierte que no hay una única forma canónica, pero sí es único el tipo de EDP. En efecto, la forma canónica es transitoria, siempre hay que volver a las variables originales, en tanto que el tipo de ecuación determina su solución.

Las ecuaciones de la física antes mencionadas proveen ejemplos de cada tipo de ecuación:

- para la ecuación de ondas en una dimensión, $u_{tt} - k^2 u_{xx} = f(x,t)$, es $b^2 - ac = k^2 > 0$, por lo tanto la ecuación es hiperbólica,
- en la ecuación de difusión, $u_t - k u_{xx} = f(x,t)$, es $b^2 - ac = 0$, y la ecuación es parabólica,
- la ecuación de Poisson, $u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$, verifica $b^2 - ac < 0$, y por lo tanto es elíptica.

Ejemplo 1. Clasificaremos y reduciremos a la forma canónica las siguientes ecuaciones

$$\mathbf{a)} \quad u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 2u_x + 5u_y - 3u = 0,$$

$$\mathbf{b)} \quad u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} = x^2 y,$$

$$\mathbf{c)} \quad u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - u_y = 0.$$

a) El discriminante correspondiente a

$$u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 2u_x + 5u_y - 3u = 0,$$

es $b^2 - ac = 9/4 > 0$, por lo tanto la ecuación diferencial es de *tipo hiperbólico*. Las características

$$\begin{aligned} y - \lambda_1 x &= cte, \\ y - \lambda_2 x &= cte, \end{aligned}$$

con λ_1 y λ_2 raíces de la ecuación $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, proveen la transformación lineal

$$\begin{aligned} y - 2x &= \xi, \\ y + x &= \eta, \end{aligned}$$

que permite reducir la ecuación dada a la forma canónica

$$U_{\xi\eta} - U_\xi - \frac{1}{3}U_\eta + \frac{1}{3}U = 0.$$

b) La ecuación

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} = x^2 y,$$

es de *tipo elíptico*, ya que su discriminante es $b^2 - ac = -1 < 0$.
Las raíces de su ecuación característica $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ son $\lambda_1 = -2 + i$ y $\lambda_2 = -2 - i$, y mediante la transformación lineal

$$\begin{aligned} y + 2x &= \xi, \\ x &= \eta, \end{aligned}$$

resulta la forma canónica

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = \eta^2(\xi - 2\eta).$$

c) El discriminante para la ecuación

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - u_y = 0$$

es nulo; se trata de una ecuación de tipo parabólico. En este caso es $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Proponiendo la transformación

$$\begin{aligned} y - x &= \xi, \\ x &= \eta, \end{aligned}$$

obtenemos la forma canónica

$$U_{\eta\eta} + 2U_\eta - 3U_\xi = 0.$$

2.1.2 Forma canónica alternativa para las ecuaciones hiperbólicas

Otra forma canónica para una EDP hiperbólica se obtiene a partir de la transformación

$$\begin{aligned} y-\lambda_1 x &= \xi+\eta, \\ y-\lambda_2 x &= \xi-\eta, \end{aligned} \tag{2.20}$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned} y-\frac{(\lambda_1+\lambda_2)}{2}x &= \xi, \\ \frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{2}x &= \eta. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Con esta transformación resultan $B=0$, y $A=-C\neq 0$, y la forma canónica alternativa es

$$U_{\xi\xi}-U_{\eta\eta}+D_1U_\xi+D_2U_\eta+D_3U=H_3(\xi,\eta). \tag{2.22}$$

Ejemplo 2. La ecuación del ejemplo 1.a,

$$u_{xx}+u_{xy}-2u_{yy}-2u_x+5u_y-3u=0,$$

podría haberse transformado según

$$\begin{aligned} y-2x &= \xi+\eta, \\ y+x &= \xi-\eta, \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} y-x/2 &= \xi, \\ -3x/2 &= \eta, \end{aligned}$$

y así obtener la forma canónica alternativa

$$U_{\xi\xi}-U_{\eta\eta}-\frac{8}{3}U_\xi-\frac{4}{3}U_\eta+\frac{4}{3}U=0.$$

2.1.3 Formas canónicas simplificadas

Eliminando la mayor cantidad posible de derivadas primeras o la función incógnita en las formas canónicas se obtienen las *formas canónicas simplificadas* para los tres tipos de ecuaciones a coeficientes constantes:

- $v_{\xi\eta}+kv=f(\xi,\eta)$ ó $v_{\xi\xi}-v_{\eta\eta}+kv=f(\xi,\eta)$ para ecuaciones hiperbólicas,

- $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + kv = f(\xi, \eta)$ para ecuaciones elípticas,
- $v_{\xi\xi} + kv_\eta = f(\xi, \eta)$ ó $v_{\eta\eta} + kv_\xi = f(\xi, \eta)$ para ecuaciones parabólicas.

Bastará resolver estos tres tipos de ecuaciones para tener resueltas todas las EDP a coeficientes constantes.
Las formas canónicas simplificadas se obtienen a partir de las formas canónicas proponiendo la transformación

$$u(\xi, \eta) = e^{(\alpha\xi + \beta\eta)}\ v(\xi, \eta), \tag{2.23}$$

con α y β constantes, y tales que anulen los coeficientes de las derivadas primeras o de la función u, según convenga.
Así, para una ecuación de tipo hiperbólico (2.14), la transformación

$$U(\xi, \eta) = v(\xi, \eta)\ e^{(-A_2\xi - A_1\eta)}, \tag{2.24}$$

conduce a

$$v_{\xi\eta} + A_3 v = e^{(A_2\xi + A_1\eta)}\ H(\xi, \eta). \tag{2.25}$$

Ejemplo 3. Consideremos la EDP

$$u_{xx} - 6u_{xy} - 7u_{yy} + 9u_x + u_y + 8u = 64y\, e^{-x}.$$

Esta ecuación es hiperbólica pues $b^2 - ac = 16$; transformando según las características

$$\begin{aligned} y + 7x &= \xi, \\ y - x &= \eta, \end{aligned}$$

obtenemos

$$U_{\xi\eta} - U_\xi + \frac{1}{8}U_\eta - \frac{1}{8}U = -\frac{(\xi + 7\eta)}{8}\ e^{(\eta-\xi)/8},$$

y haciendo

$$U(\xi, \eta) = v(\xi, \eta)\, e^{-\xi/8+\eta},$$

llegamos a la forma canónica simplificada

$$v_{\xi\eta} = -\frac{(\xi + 7\eta)}{8}\ e^{-7\eta/8}.$$

Observemos que esta ecuación puede integrarse inmediatamente respecto de η y de ξ sucesivamente; esto es posible en ecuaciones de tipo hiperbólico cuando en la forma simplificada no aparece la función v. Integrando resulta

$$v = \left[\xi^2/14 + \xi(\eta + 8/7)\right]\ e^{-7\eta/8} + C(\xi) + K(\eta),$$

y volviendo a las variables originales, obtenemos la solución general de la ecuación dada

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{15}{14}y^2 - \frac{7}{2}x^2 + 7xy + \frac{8}{7}y + 8x\right) e^{-x} \\ &+ \phi(y+7x)\, e^{y-x} + \varphi(y-x)\, e^{-(7x+y)/8}. \end{aligned}$$

2.2 EDP lineales de 2° orden con coeficientes variables. Clasificación y formas canónicas

La forma general de las *ecuaciones lineales con coeficientes variables* es

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + l(x,y)u = f(x,y), \tag{2.26}$$

y su ecuación característica asociada

$$a(x,y)\,(dy)^2 - 2b(x,y)\,(dx)(dy) + c(x,y)\,(dx)^2 = 0, \tag{2.27}$$

puede factorearse en la forma

$$(dy - \lambda_1(x,y)dx)\,(dy - \lambda_2(x,y)dx) = 0. \tag{2.28}$$

Las soluciones de (2.28) son las curvas características

$$\begin{aligned} \phi(x,y) &= c_1, \\ \varphi(x,y) &= c_2. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Mediante la transformación

$$\begin{aligned} \phi(x,y) &= \xi, \\ \varphi(x,y) &= \eta, \end{aligned} \tag{2.30}$$

con $\partial(\xi,\eta)/\partial(x,y) \neq 0$, la ecuación (2.26) con $u(x,y) = U(\xi,\eta)$ se transforma en

$$\begin{aligned} &A(\xi,\eta)U_{\xi\xi} + 2B(\xi,\eta)U_{\xi\eta} + C(\xi,\eta)U_{\eta\eta} + D(\xi,\eta)U_\xi + \\ &\qquad + E(\xi,\eta)U_\eta + L(\xi,\eta)U = F(\xi,\eta), \end{aligned} \tag{2.31}$$

con

$$\begin{aligned} A(\xi,\eta) &= a\phi_x^2 + 2b\phi_x\phi_y + c\phi_y^2, \\ B(\xi,\eta) &= a\phi_x\varphi_x + b(\phi_x\varphi_y + \phi_y\varphi_x) + c\phi_y\varphi_y, \\ C(\xi,\eta) &= a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D(\xi,\eta) &= a\phi_{xx} + 2b\phi_{xy} + c\phi_{yy} + d\phi_x + e\phi_y, \\
E(\xi,\eta) &= a\varphi_{xx} + 2b\varphi_{xy} + c\varphi_{yy} + d\varphi_x + e\varphi_y, \\
L(\xi,\eta) &= l, \\
F(\xi,\eta) &= f. \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

La ecuación característica asociada a (2.31) es

$$
A\,(d\eta)^2 - 2B\,(d\xi)(d\eta) + C\,(d\xi)^2 = 0, \qquad (2.33)
$$

y los discriminantes de ambas ecuaciones características verifican

$$
B^2 - AC \,=\, (b^2 - ac)\,\left[\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right]^2. \qquad (2.34)
$$

Esto permite, como antes, definir el tipo de ecuación según el signo del discriminante, ya que éste no cambia cualquiera sea la transformación que se aplique. Por lo tanto, la ecuación (2.26) se clasifica según el siguiente criterio:

- si $b^2 - ac > 0$ en una región R del plano, la ecuación es *hiperbólica* en R,
- si $b^2 - ac < 0$ en una región R del plano, la ecuación es *elíptica* en R,
- si $b^2 - ac = 0$ en una región R del plano, la ecuación es *parabólica* en R.

Para hallar la forma canónica de la ecuación (2.26), diferenciamos las características,

$$
\begin{aligned}
\phi_x dx + \phi_y dy &= 0, \\
\varphi_x dx + \varphi_y dy &= 0, \qquad (2.35)
\end{aligned}
$$

o, en forma equivalente,

$$
\begin{aligned}
dy + \frac{\phi_x}{\phi_y}\,dx &= 0, \\
dy + \frac{\varphi_x}{\varphi_y}\,dx &= 0, \qquad (2.36)
\end{aligned}
$$

con lo cual

$$
\lambda_1 = -\frac{\phi_x}{\phi_y}, \quad \lambda_2 = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}. \qquad (2.37)
$$

Las formas canónicas se obtienen como sigue:

- si la ecuación es *hiperbólica en* R es $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y resulta $\phi_x \varphi_y - \phi_y \varphi_x \neq 0$, o sea, $\partial(\xi, \eta)/\partial(x, y) \neq 0$. En este caso se elige la transformación

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \xi, \\ \varphi(x, y) &= \eta, \end{aligned} \tag{2.38}$$

lo que conduce a $A = C = 0$, y se obtiene la *forma canónica*

$$U_{\xi\eta} + D(\xi, \eta)U_\xi + E(\xi, \eta)U_\eta + L(\xi, \eta)U = F(\xi, \eta), \tag{2.39}$$

- si la ecuación es *elíptica en* R, se elige la transformación real

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \xi + i\eta, \\ \varphi(x, y) &= \xi - i\eta, \end{aligned} \tag{2.40}$$

o bien

$$\begin{aligned} \frac{\phi(x, y) + \varphi(x, y)}{2} &= \xi, \\ \frac{\phi(x, y) - \varphi(x, y)}{2i} &= \eta, \end{aligned} \tag{2.41}$$

de donde $A = C$, $B = 0$, y la *forma canónica* es

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + D(\xi, \eta)U_\xi + E(\xi, \eta)U_\eta + L(\xi, \eta)U = F(\xi, \eta), \tag{2.42}$$

- si la ecuación es *parabólica en* R y $\phi(x, y)$ es la curva característica, se elige una función $\phi_1(x, y)$, de modo que la transformación

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \xi, \\ \phi_1(x, y) &= \eta, \end{aligned} \tag{2.43}$$

verifique $\partial(\xi, \eta)/\partial(x, y) \neq 0$, lo que conduce a la *forma canónica*

$$U_{\eta\eta} + D(\xi, \eta)u_\xi + E(\xi, \eta)u_\eta + L(\xi, \eta)u = F(\xi, \eta). \tag{2.44}$$

Ejemplo 4. La ecuación

$$yu_{xx} + xu_{xy} + 2xu_{yy} + xu_x - u_y + u = 0,$$

es hiperbólica en las regiones $x > 0, 8y < x$, y $x < 0, 8y > x$, elíptica en $x > 0, 8y > x$, y en $x < 0, 8y < x$, y parabólica en $x = 0, y \neq 0$, y en $x \neq 0, x = 8y$.

Ejemplo 5. La ecuación

$$yu_{xx} + xu_{xy} + 2xu_x - u = 0,$$

es hiperbólica en la región $x \neq 0$, y parabólica en $x = 0$. Para $x \neq 0$, transformando según

$$\begin{aligned} y &= \xi, \\ y^2 - x^2 &= \eta, \end{aligned}$$

se obtiene

$$U_{\xi\eta} + U_\eta \frac{2(\xi + 2\xi^2 - 2\eta)}{(\xi^2 - \eta)} + U \frac{1}{(\xi^2 - \eta)} = 0.$$

2.3 Método de las características para hallar una solución general para EDP hiperbólicas

El método de las características nos permite hallar una solución general a partir de la forma canónica de una ecuación hiperbólica. En efecto, en el ejemplo 3 hemos visto cómo, al encontrar la forma canónica de la EDP, resultó una ecuación fácilmente integrable, para la cual obtuvimos una solución general. Sin embargo, no toda ecuación hiperbólica es resoluble de esta manera, como lo ilustra el último ejemplo considerado donde, además de $U_{\xi\eta}$ aparecen U_η y U. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 6. Hallaremos la solución general de

$$u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x\ u_{yy} - \cos x\ u_y = 0.$$

La transformación según las características

$$\begin{aligned} y - \cos x - x &= \xi, \\ y - \cos x + x &= \eta, \end{aligned}$$

nos conduce a

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Integrando obtenemos $u = \phi(\xi) + \psi(\eta)$ y la solución general es

$$u = \phi(y - \cos x - x) + \psi(y - \cos x + x).$$

Ejemplo 7. Resolveremos el problema de Cauchy

$$u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^y = 0,$$

$$\begin{aligned} u(0,y) &= \alpha(y), \\ u_x(0,y) &= \beta(y). \end{aligned}$$

El discriminante es $b^2 - ac = 1 > 0$, la ecuación es de tipo hiperbólico y $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 0$ son las raíces de la ecuación característica asociada. Mediante la transformación

$$\begin{aligned} \xi &= y + 2x, \\ \eta &= y, \end{aligned}$$

la ecuación se reduce a la forma canónica

$$u_{\xi\eta} = e^{\eta},$$

e integrando resulta

$$u(\xi, \eta) = \xi e^{\eta} + \phi(\xi) + \psi(\eta),$$

es decir

$$u(x, y) = (y + 2x)e^{y} + \phi(y + 2x) + \psi(y),$$

con

$$u_x = 2e^{y} + 2\phi'(2x + y).$$

Además, es

$$\begin{aligned} u(0,y) = \alpha(y) &= ye^{y} + \phi(y) + \psi(y), \\ u_x(0,y) = \beta(y) &= 2e^{y} + 2\phi'(y), \end{aligned}$$

entonces

$$\phi(y) = \int_{y_0}^{y} \left(\frac{\beta(z)}{2} - e^{z} \right) dz + C,$$

y

$$\psi(y) = \alpha(y) - ye^{y} - \int_{y_0}^{y} \left(\frac{\beta(z)}{2} - e^{z} \right) dz - C,$$

de donde se obtiene

$$u(x, y) = \alpha(y) + \left(2x + 1 - e^{2x}\right) e^{y} + \int_{y}^{2x+y} \frac{\beta(z)}{2}\, dz.$$

2.4 EDP lineales de 2° orden con más de dos variables independientes. Clasificación

Consideremos la ecuación lineal

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu + l = 0, \tag{2.45}$$

donde a_{ij}, b_i, c, l son funciones de x_1,..., x_n. Sean a^0_{ij} los coeficientes a_{ij} evaluados en un punto $P_0(x^0_1, ..., x^0_n)$. Trabajando con la primera sumatoria de (2.45), es decir, con los términos que contienen a las derivadas de segundo orden,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^0_{ij}u_{x_ix_j}, \tag{2.46}$$

y asociando a ella la forma cuadrática

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^0_{ij}x_ix_j, \tag{2.47}$$

mediante una transformación lineal no singular de matriz A,

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \tag{2.48}$$

se la reduce a la forma canónica

$$\sum_{i=1}^{m} \pm\xi_i^2, \qquad m \leq n. \tag{2.49}$$

Cualquier otra transformación lineal que se utilice es tal que el número de coeficientes positivos, negativos y nulos en (2.49) es independiente de ella y está determinado por (2.47) (ley de inercia de las formas cuadráticas). La expresión (2.46) se reduce a la forma canónica mediante la transformación de matriz

$$B = (A^{-1})^T, \tag{2.50}$$

(Birkhoff & MacLane, 1951; Petrovsky, 1954).
La clasificación de (2.45) se define escribiendo la EDP en la forma canónica:

$$\sum_{i=1}^{m} \pm U_{\xi_i\xi_j} + F = 0, \tag{2.51}$$

con $u(x_1, ..., x_n) = U(\xi_1, ..., \xi_n)$.

- Si $m = n$, y $(n-1)$ coeficientes tienen el mismo signo y uno de ellos signo opuesto, la ecuación se llama *hiperbólica* en P_0.

- Si $m = n$, y todos los coeficientes tienen el mismo signo, la ecuación se dice *elíptica* en P_0.
- Si $m < n$, la ecuación es *parabólica* en P_0.
- Si hay $m > 1$ coeficientes de un signo y $(n-m) > 1$ de signo opuesto, la ecuación se dice *ultrahiperbólica* en P_0.

Ejemplo 8. Clasificaremos la ecuación

$$u_{xx} + xu_{xy} + zu_{yy} + 2u_{xz} + xyu_y + u = 0,$$

y obtendremos su forma canónica.

La forma cuadrática asociada a la ecuación en $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es

$$x^2 + x_0xy + z_0y^2 + 2xz.$$

Si la normalizamos completando cuadrados obtenemos

$$\left(\sqrt{z_0}y + \frac{x_0x}{2\sqrt{z_0}}\right)^2 + \left[\sqrt{1-\frac{x_0^2}{4z_0}}\,x + \left(\sqrt{1-\frac{x_0^2}{4z_0}}\right)^{-1} z\right]^2 - \left(1-\frac{x_0^2}{4z_0}\right)^{-1} z^2 =$$
$$= \overline{\xi}^2 + \overline{\eta}^2 - \overline{\rho}^2,$$

Llamando $\beta = \sqrt{z_0}$, $\alpha = x_0/(2\sqrt{z_0})$ y $\gamma = (1-\alpha^2)^{1/2}$, la transformación lineal utilizada en la normalización anterior es

$$\begin{aligned} \overline{\xi} &= \alpha x + \beta y, \\ \overline{\eta} &= \gamma x + \gamma^{-1} z, \\ \overline{\rho} &= \gamma^{-1} z, \end{aligned}$$

con matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & \gamma^{-1} \\ 0 & 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix}$$

- Para la región del espacio $4z_0 > x_0^2$, la EDP se lleva a la forma canónica mediante la transformación de matriz

$$(A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 0 & \beta^{-1} & 0 \\ \gamma^{-1} & -\alpha(\beta\gamma)^{-1} & 0 \\ \gamma^{-1} & \alpha(\beta\gamma)^{-1} & \gamma \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{aligned}\xi &= \beta^{-1}y,\\ \eta &= \gamma^{-1}x-\alpha(\beta\gamma)^{-1}y,\\ \rho &= \gamma^{-1}x+\alpha(\beta\gamma)^{-1}+\gamma z.\end{aligned}$$

Calculando $u_y, u_{xy}, u_{xx}, u_{yy}$ y u_{xz} en el espacio de las nuevas variables ξ, η, ρ, con $u(x,y,z) = U(\xi,\eta,\rho)$ resulta

$$\begin{aligned}U_{\xi\xi}+U_{\eta\eta} &- U_{\rho\rho}+\frac{x_0y_0}{\sqrt{z_0}}U_\xi-\frac{x_0^2\,y_0}{\sqrt{z_0(4z_0-x_0^2)}}U_\eta+\\ &+ \frac{x_0^2\,y_0}{\sqrt{z_0(4z_0-x_0^2)}}U_\rho+U=0\end{aligned}$$

que es una ecuación de tipo hiperbólico.

- Para los puntos de la región $z_0 > 0$, $z_0 < x_0^2/4$, la forma cuadrática canónica se obtiene mediante la transformación real

$$\begin{aligned}\overline{\xi} &= \alpha x+\beta y,\\ \overline{\eta} &= \overline{\gamma}x+\overline{\gamma}{-1}z,\\ \overline{\rho} &= -\overline{\gamma}^{-1}z,\end{aligned}$$

que resulta en la transformación real para la EDP:

$$\begin{aligned}\xi &= \beta^{-1}y,\\ \eta &= \overline{\gamma}^{-1}x-\alpha(\beta\overline{\gamma})^{-1}y,\\ \rho &= \overline{\gamma}^{-1}x+\alpha(\beta\overline{\gamma})^{-1}y-\overline{\gamma}z.\end{aligned}$$

Obtenemos así la forma canónica de la ecuación,

$$U_{\xi\xi}-U_{\eta\eta}+U_{\rho\rho}+\frac{x_0y_0}{\sqrt{z_0}}U_\xi-\frac{x_0^2\,y_0}{\sqrt{z_0(-4z_0+x_0^2)}}U_\eta+\frac{x_0^2\,y_0}{\sqrt{z_0(-4z_0+x_0^2)}}U_\rho+U=0,$$

y en esta región la EDP es de tipo hiperbólico.

- Si $4z_0 = x_0^2$, la ecuación a transformar es

$$u_{xx} + x_0 u_{xy} + \frac{x_0^2}{4} u_{yy} + 2u_{xz} + x_0 y_0 u_y + u = 0.$$

  Si normalizamos la forma cuadrática,

$$\begin{aligned} x^2 + x_0 xy + \frac{x_0^2}{4} y^2 + 2xz &= \left(\frac{x_0}{2} y + x + z\right)^2 - \left(z + \frac{x_0}{2} y\right)^2 + \frac{x_0^2}{4} y^2 = \\ &= \overline{\xi}^2 + \overline{\eta}^2 - \overline{\rho}^2, \end{aligned}$$

  nos conduce a la transformación

$$\begin{aligned} \xi &= x, \\ \eta &= \frac{2y}{x_0} - z, \\ \rho &= -x + z, \end{aligned}$$

  con la que obtenemos la forma canónica

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} - U_{\rho\rho} + 2y_0 U_\eta + U = 0.$$

  En esta región la EDP es de tipo hiperbólico.

- En $z = 0$, la EDP es

$$u_{xx} + x_0 u_{xy} + 2u_{xz} + x_0 y_0 u_y + u = 0.$$

  Al normalizar la forma cuadrática,

$$x^2 + x_0 xy + 2xz = \left(\frac{x_0}{2} y + x + z\right)^2 - \left(z + \frac{x_0}{2} y\right)^2 = \overline{\xi}^2 - \overline{\eta}^2 + 0\overline{\rho}^2,$$

  obtenemos la transformación:

$$\begin{aligned} \xi &= x, \\ \eta &= -x + \frac{2}{x_0} y, \\ \rho &= -\frac{2}{x_0} y + z, \end{aligned}$$

  resultando la forma canónica,

$$U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} + 2y_0 U_\eta - 2y_0 U_\rho + U = 0.$$

  Aquí la ecuación es de tipo parabólico.

En resumen, la EDP dada es hiperbólica en todo el espacio excepto en el plano $z = 0$, donde es parabólica.

Note el lector, al completar los detalles de este problema, que es posible determinar el tipo de ecuación a partir de la forma cuadrática normalizada.

2.5 Problemas propuestos

1- Demostrar que la transformación lineal

$$\alpha x + \beta y = \xi,$$
$$\gamma x + \delta y = \eta,$$

transforma las características de la ecuación a coeficientes constantes

$$a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + d u_x + e u_y + f u = g(x, y),$$

en las características de la ecuación transformada.

2- Demostrar que los coeficientes de la EDP y de su transformada están relacionados por

$$B^2 - AC = (b^2 - ac) \left(\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right)^2.$$

3- Demostrar que otra forma de la ecuación hiperbólica normal es

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + ... = G(\xi, \eta).$$

Sugerencia: utilizar

$$y - \lambda_1 x = \xi + \eta,$$
$$y - \lambda_2 x = \xi - \eta.$$

4-a) Hallar las formas canónicas simplificadas para las ecuaciones a coeficientes constantes de tipo elíptico y parabólico.
b) Decir por qué en el caso parabólico no tienen interés formas distintas de

$$v_{\xi\xi} + k v_\eta = f(\xi, \eta),$$

con $k \neq 0$.

5- Clasificar y hallar la solución general de
a)

$$3u_{xx} - 4u_x + u + x = 0;$$

b)

$$u_{xx} + u = y e^x.$$

6- Clasificar y reducir a la forma canónica
a)

$$3u_{xx} + 5u_{xy} - u_x = e^x,$$

b)

$$4u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} + u_y = x,$$

c)

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + u = x^2 y.$$

7- Reducir a la forma canónica simplificada

a)

$$2u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u_y = x + y,$$

b)

$$u_{xx} - 3u_{xy} + u_x + u = xy.$$

8- Demostrar que para la EDP lineal de segundo orden con coeficientes variables se verifica que

$$B^2 - AC = (b^2 - ac) \left(\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right)^2 .$$

9- Para la EDP lineal de segundo orden hiperbólica con coeficientes variables hallar otra forma canónica.

10- Clasificar y reducir a la forma canónica

a)

$$xu_{xx} + 2xu_{xy} + (x-1)u_{yy} = 0,$$

b)

$$u_{xx} + xyu_{yy} = 0.$$

c)

$$u_{xx} - 2\,ch(x)\,u_{xy} + u_{yy} + e^{-x}\,u_y = 0.$$

11- Por el método de las características, hallar la solución general de:

a)

$$3u_{xx} \;+\; 10u_{xy} \;+\; 3u_{yy} \;+\; u_x \;+\; u_y \;+\; u/16 \;-\; 16x\,e^{-(x+y)/16} \;=\; 0,$$

b)

$$u_{xx} \;-\; 2\cos x\; u_{xy} \;-\; [3 + (\sin x)^2]u_{yy} \;+\; u_x \;+\; (\sin x - \cos x - 2)u_y \;=\; 0,$$

c)

$$e^{-2x}\,u_{xx} \;-\; e^{-2y}\,u_{yy} \;-\; e^{-2x}\,u_x \;+\; e^{-2y}\,u_y \;+\; 8e^y \;=\; 0.$$

d)

$$u_{xx} \;+\; u_{xy} \;-\; 2\,u_{yy} \;-\; 2\,u_x \;+\; 5\,u_y \;-\; 3\,u \;=\; 0.$$

12.- Clasificar las siguientes ecuaciones y reducir a la forma canónica.

a)

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} + 3u_x = 0$$

b)

$$u_{xy} - u_{xz} + 3xu_x - 2yu_z + x = 0$$

13- Resolver el problema de Cauchy

a)

$$4y^2u_{xx} + 2(1-y^2)u_{xy} - u_{yy} = \frac{2y}{(1+y^2)}(2u_x - u_y),$$

con $u(x,0) = \alpha(x),\ u_y(x,0) = \beta(x)$.

b)

$$u_{xx} - 2u_{xy} + 4exp(y) = 0,$$

con $u(0,y) = \alpha(y),\ u_x(0,y) = \beta(y)$.

Soluciones a los problemas propuestos

4- Ecuación elíptica:

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + kv = G^*(\xi,\eta);$$

ecuación parabólica:

$$v_{\xi\xi} + kv_\eta = G^*(\xi,\eta)$$

5-a Ecuación parabólica;

$$u(x,y) = a(y)e^x + b(y)e^{x/3} - (x+4)$$

5-b Ecuación parabólica;

$$u(x,y) = a(y)\cos x + b(y)\sin x + ye^x/2$$

6-a Ecuación hiperbólica;

$$u_{\xi\eta} - u_\xi/5 = -3e^{3(\xi-\eta)/5}/25$$

6-b Ecuación elíptica;

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_\xi/2 = -\eta/\sqrt{2}$$

6-c Ecuación parabólica;

$$u_{\eta\eta} + 2u_\xi + u = \eta(\xi-\eta)^2$$

7-a

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - v = 2(\xi+\eta)e^\xi$$

7-b

$$v_{\xi\eta} - v/9 = \xi(\eta - \xi)e^{-\xi/3}/27$$

9-

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + D(\xi,\eta)u_\xi + E(\xi,\eta)u_\eta + F(\xi,\eta)u = G(\xi,\eta)$$

10-a Para $x > 0$ es hiperbólica;

$$u_{\xi\eta} + (u_\xi - u_\eta)/2(\xi - \eta) = 0,$$

para $x = 0$ es parabólica;

$$u_{yy} = 0,$$

para $x < 0$ es elíptica;

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - \eta u_\eta/4 = 0.$$

10-b En $2°$ y $4°$ cuadrantes es hiperbólica;

$$u_{\xi\eta} + \frac{u_\xi}{2}\left[\frac{1}{3(\eta - \xi)} - \frac{1}{(\xi + \eta)}\right] - \frac{u_\eta}{2}\left[\frac{1}{3(\eta - \xi)} + \frac{1}{(\xi + \eta)}\right] = 0,$$

en $1°$ y $3°$ cuadrantes es elíptica;

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0,$$

para $x = 0$ ó $y = 0$ parabólica;

$$u_{xx} = 0.$$

10-c Para $x \neq 0$ es hiperbólica;

$$u_{\xi\eta} + u_\eta \, \frac{(\eta - \xi)}{4 - (\xi - \eta)^2} = 0,$$

para $x = 0$ es parabólica;

$$u_{\eta\eta} + u_\xi = 0,$$

11-a

$$u(x,y) = e^{-(x+y)/16}\left[8x^3/9 + \phi(y - 3x) + \psi(y - x/3)\right]$$

11-b

$$u(x,y) = e^{-(y+\sin x+2x)/4}[\phi(y + \sin x - 2x) + \psi(y + \sin 2x + 2x)]$$

11-c

$$u(x,y) = e^y(e^{2y} - e^{2x})\left[\phi(e^y - e^x) + \psi(e^y + e^x)\right]$$

11-d

$$u(x,y) = e^{(4y+x)/3}\left[\phi(y - 2x) + \psi(y + x)\right]$$

12- a Ecuación hiperbólica;

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - u_{\rho\rho} - 3u_{\xi} = 0$$

12- b Ecuación parabólica;

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + (\xi + 2\eta)u_{\xi} + 3(\xi + \eta)u_{\eta}/2 + (\xi + \eta)/2 = 0$$

13-a

$$u(x, y) = \alpha(x - 2y^3/3) + \frac{1}{2}\int_{x-2y^3/3}^{x+2y} \beta(z)dz$$

13-b

$$u(x, y) = \alpha(y) + e^y(1 - e^{2x} + 2x) + \frac{1}{2}\int_{y}^{2x+y} \beta(z)dz$$

Capítulo 3

Ecuaciones hiperbólicas en una dimensión espacial

3.1 Propagación en la recta. Ecuación homogénea

La ecuación de onda homogénea en una dimensión,

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \tag{3.1}$$

donde x denota la posición y t el tiempo, describe el desplazamiento normal de las perturbaciones de una cuerda vibrante flexible cuando las oscilaciones respecto a la posición de equilibrio son pequeñas.
Se trata de una ecuación de tipo hiperbólico que se resuelve por el método de las características; en efecto, transformando según las rectas características

$$\begin{aligned} x + at &= \xi, \\ x - at &= \eta, \end{aligned} \tag{3.2}$$

se obtiene

$$u_{\xi\eta} = 0, \tag{3.3}$$

cuya solución general es $u = f(\xi) + g(\eta)$, que en términos de las variables originales se escribe

$$u = f(x + at) + g(x - at), \tag{3.4}$$

donde f y g tienen derivadas segundas continuas.
Se observa que la solución general se obtiene como la suma de dos soluciones y puede interpretarse como la superposición de una onda que se desplaza hacia la izquierda y otra hacia la derecha, ambas con velocidad constante a y sin alterar su forma.

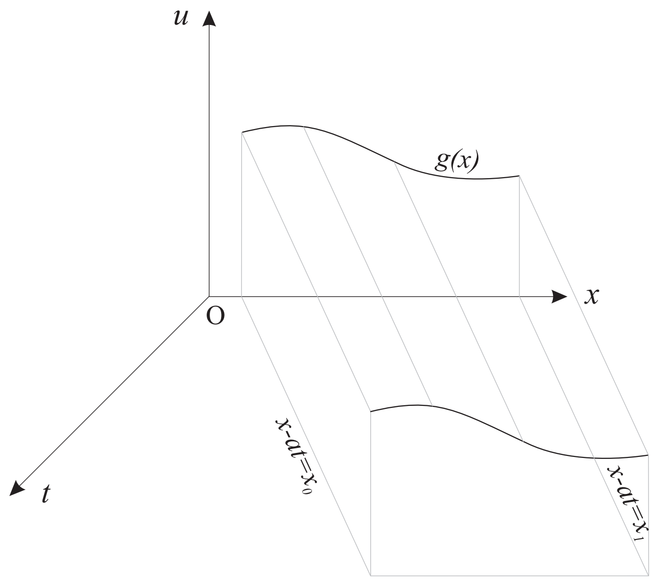


Figura 3.1: Comportamiento del perfil $g(x-at)$ sobre las características $x-at=cte$.

La figura 3.1 ilustra el desplazamiento del perfil $g(x-at)$ sobre las características de ecuación $x-at=cte$.

Problema de Cauchy

El *problema de Cauchy* consiste en hallar la solución de la ecuación de onda cuando se dan los valores de u y de u_t para $t=0$. Se trata de un problema de valor inicial pues el desplazamiento u depende del perfil y de la distribución de velocidades de la cuerda para $t=0$. Se supone que el resultado es válido para todo x, es decir, $-\infty < x < \infty$.
Este planteo corresponde al caso de una cuerda suficientemente larga o, en su defecto, al caso en que se considera un intervalo de tiempo pequeño, por lo que no se evidencia la influencia de los extremos de la cuerda.
El problema consiste en hallar la solución a la ecuación de onda,

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad a > 0, \qquad -\infty < x < \infty, \; t \geq 0, \tag{3.5}$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{3.6}$$

Para resolverlo partimos de la solución general (3.4) y, utilizando las condi-

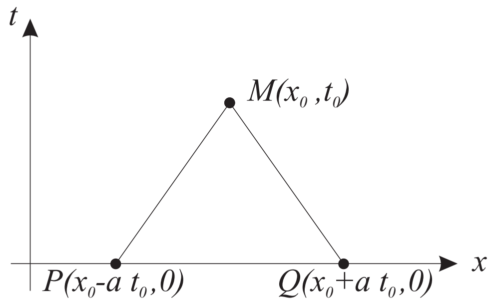


Figura 3.2: Triángulo característico correspondiente al punto de coordenadas (x_0, t_0) en el espacio de fases.

ciones iniciales del problema, obtenemos

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \phi(x) = f(x) + g(x), \\ u_t(x,0) &= \psi(x) = af'(x) - ag'(x). \end{aligned} \tag{3.7}$$

y de la última, la relación

$$\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\, d\xi = af(x) - ag(x) + a\,C. \tag{3.8}$$

Con la primera de (3.7) y (3.8) se determinan las funciones f y g,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\,\phi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\, d\xi - \frac{C}{2}, \\ g(x) &= \frac{1}{2}\,\phi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\, d\xi + \frac{C}{2}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

y la solución al problema es

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\{\phi(x-at) + \phi(x+at)\} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi. \tag{3.10}$$

A esta solución, que describe cómo se propagan la desviación y la velocidad iniciales, se la conoce como *fórmula de D'Alembert*.

Si en el plano de las fases (x, t), por el punto (x_0, t_0) se trazan las características de ecuación $x \pm at = x_0 \pm at_0$, queda determinado un triángulo llamado *triángulo característico*, como se muestra en la figura 3.2.
De la fórmula de D'Alembert se deduce que el valor de la solución u en el punto (x_0, t_0) depende del valor de ϕ en los puntos $(x_0 \pm at_0, 0)$, y del valor de ψ en los puntos del intervalo $(x_0 - at_0, x_0 + at_0)$ del eje $t = 0$. El intervalo $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$, base del triángulo característico, se denomina *dominio de dependencia*

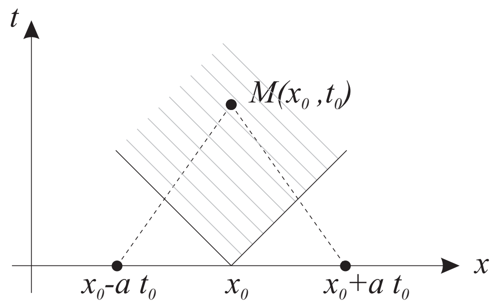


Figura 3.3: Dominio de influencia de $(x_0, 0)$ (región sombreada) y dominio de dependencia del punto M (intervalo sobre el eje x, $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$).

de $u(x_0, t_0)$. Por otro lado, un punto $(x_0, 0)$ influye en la determinación de los valores de u en los puntos (x, t) de la región limitada por las características que pasan por él; a esta región del plano de fases se la denomina *dominio de influencia* de $(x_0, 0)$ y se la muestra sombreada en la figura 3.3.

Ejemplo 1. Hallaremos las vibraciones de una cuerda que ha sido sometida a una deformación inicial dada por

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

y con velocidad inicial nula.

Aplicando la fórmula de D'Alembert obtenemos

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\phi(x-at) + \phi(x+at)}{2} \\ &= \begin{cases} 1 - (x^2 + a^2t^2), & at - 1 \leq x \leq 1 - at \\ \left[1 - (x - at)^2\right]/2, & |at - 1| \leq x \leq 1 + at \\ \left[1 - (x + at)^2\right]/2, & -at - 1 \leq x \leq -|1 - at| \\ 0, & at + 1 < |x|,\ |x| < at - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Hallando el valor de u en distintos instantes, por ejemplo en $t = 1/2a$, $t = 1/a$, y $t = 2/a$, comprobamos que la onda inicial se desdobla en dos de semi-amplitud; una que se desplaza hacia la derecha y la otra hacia la izquierda,

ambas con velocidad a:

$$u\left(x,\frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{2}\begin{cases} 3/4 - x^2 - x, & -3/2 \le x \le -1/2 \\ 3/2 - 2x^2, & -1/2 \le x \le 1/2 \\ 3/4 - x^2 + x, & 1/2 \le x \le 3/2 \\ 0, & |x| > 3/2, \end{cases}$$

$$u\left(x,\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2}\begin{cases} -x^2 - 2x, & -2 \le x \le 0 \\ -x^2 + 2x, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & |x| > 2, \end{cases}$$

$$u\left(x,\frac{2}{a}\right) = \frac{1}{2}\begin{cases} -3 - x^2 - 4x, & -3 \le x \le -1 \\ -3 - x^2 + 4x, & -1 \le x \le 3 \\ 0, & |x| < 1,\ |x| > 3. \end{cases}$$

El perfil de la cuerda en cada uno de estos instantes se ilustra en la figura 3.4. Analizando la solución en el plano de las fases (x, t), vemos que la condición $\psi(x) = 0$ implica que el dominio de dependencia consiste sólo en los extremos del intervalo $[-1, 1]$. De hecho, para visualizar cómo se propaga la deformación inicial, podemos dividir el plano de las fases (x, t) en seis regiones determinadas por las características que pasan por ± 1, que graficamos en la figura 3.5.

En la región I se propaga la onda $\phi(x + at)/2$, en la III la onda $\phi(x - at)/2$, y en la II la suma de ambas. Como la perturbación viaja a lo largo de las características, en las restantes regiones no hay desplazamiento.

Relacione el lector los gráficos 3.4 y 3.5, e imagine el perfil de la cuerda a medida que transcurre el tiempo. Así por ejemplo, para $t = 1/a$, de la figura 3.5 se deduce que si $-2 \le x \le 0$ la onda tiene la forma $\phi(x+1)/2$, si $0 \le x \le 2$ es $\phi(x - 1)/2$ y es nula para $|x| > 2$. Esto naturalmente concuerda con los valores calculados para $u(x, 1/a)$.

Ejemplo 2. A una cuerda infinita sin deformación inicial, se le imparte una velocidad inicial transversal $v_0 = cte$, sobre la sección $-1 \le x \le 1$, es decir

$$u(x, 0) = 0, \qquad u_t(x, 0) = \begin{cases} v_0, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

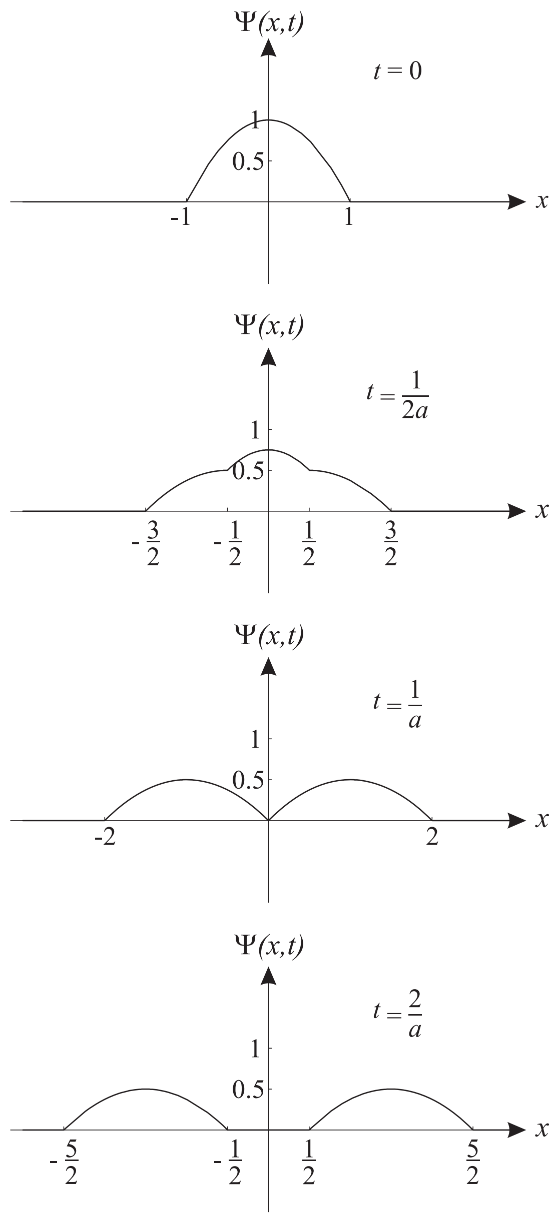


Figura 3.4: Perfil de la cuerda para los instantes $t = 0$, $t = 1/2a$, $t = 1/a$ y $t = 2/a$ siendo nula la distribución inicial de velocidades.

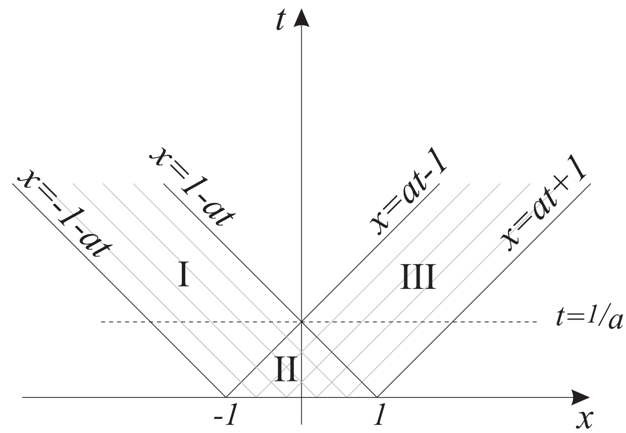


Figura 3.5: Regiones determinadas por las características que pasan por ± 1.

Para hallar su desplazamiento recurrimos a la fórmula de D'Alembert:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)d\alpha.$$

Definimos entonces la función

$$\Psi(x) = \frac{1}{2a}\int_{-1}^{x} \psi(\alpha)d\alpha = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ (x+1)v_0/2a, & -1 < x < 1 \\ v_0/a, & x > 1, \end{cases}$$

cuya gráfica se presenta en la figura 3.6.
La solución es la diferencia de dos ondas con perfil $\Psi(x)$, que se propagan con velocidades opuestas $\pm a$,

$$u(x,t) = \Psi(x+at) - \Psi(x-at).$$

El perfil de la cuerda en $t = 0$, $1/2a$, $1/a$, $3/2a$, representado en la figura 3.7, viene dado por

$$u(x,0) \quad = \quad 0,$$

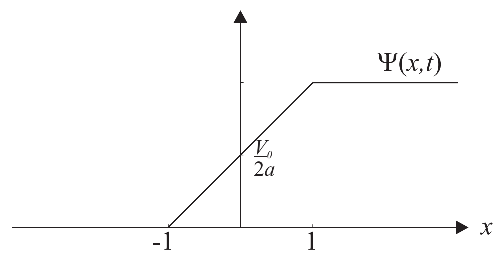


Figura 3.6: Gráfica de la función $\Psi(x)$ definida en el texto.

$$
\begin{aligned}
u(x,1/2a) &= \Psi(x+1/2)-\Psi(x-1/2)= \\
&= \begin{cases} 0, & |x|>3/2 \\ (x+3/2)v_0/2a, & -3/2<x<-1/2 \\ v_0/2a, & |x|<1/2 \\ (-x+3/2)v_0/2a, & 1/2<x<3/2, \end{cases} \\
u(x,1/a) &= \begin{cases} 0, & |x|>2 \\ (x+2)v_0/2a, & -2<x<0 \\ (-x+2)v_0/2a, & 0<x<2, \end{cases} \\
u(x,3/2a) &= \begin{cases} 0, & |x|>5/2 \\ (x+5/2)v_0/2a, & -5/2<x<-1/2 \\ v_0/a, & |x|<1/2 \\ (-x+5/2)v_0/2a, & 1/2<x<5/2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Se advierte que para $t>1/a$ la cuerda adopta un perfil trapezoidal que se ensancha uniformemente con el tiempo.

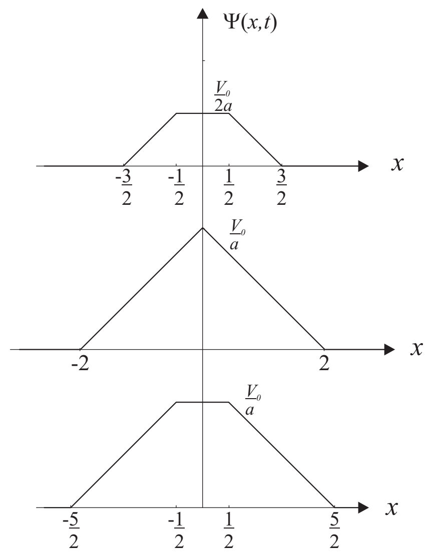


Figura 3.7: Perfil de la cuerda en $t = 1/2a,\ 1/a$ y $3/2a$ correspondiente al ejemplo 2.

3.2 Propagación en la recta. Ecuación no homogénea

El problema de Cauchy para la ecuación de onda no homogénea está dado por

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ u(x,0) &= \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \end{aligned} \tag{3.11}$$

donde la función $f(x,t)$ representa una fuerza externa por unidad de masa.

Resolveremos la ecuación por el método de las características. La transformación

$$\begin{aligned} \xi &= x + at, \\ \eta &= x - at, \end{aligned} \tag{3.12}$$

lleva la EDP a la forma

$$u_{\xi\eta}\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2a}\right) = -\frac{1}{4a^2}\, f\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2a}\right), \tag{3.13}$$

que integrada con respecto a ξ entre η y ξ, es

$$u_\eta\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2a}\right) = u_\eta(\eta,0) - \frac{1}{4a^2}\int_\eta^\xi f\left(\frac{\bar\xi+\eta}{2}, \frac{\bar\xi-\eta}{2a}\right) d\bar\xi. \tag{3.14}$$

Integrando respecto de η entre η y ξ, y teniendo en cuenta que

$$u_\eta(\eta,0) \;=\; \frac{1}{2}u_x(\eta,0) - \frac{1}{2a}u_t(\eta,0), \tag{3.15}$$

obtenemos

$$u(\xi,0) - u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2a}\right) = \int_\eta^\xi \left[\frac{1}{2}u_x(\overline{\eta},0) - \frac{1}{2a}u_t(\overline{\eta},0)\right]\, d\overline{\eta} -$$

$$-\frac{1}{4a^2}\int_\eta^\xi \int_{\overline{\eta}}^\xi f\left(\frac{\overline{\xi}+\overline{\eta}}{2}, \frac{\overline{\xi}-\overline{\eta}}{2a}\right)\, d\overline{\xi}d\overline{\eta}. \tag{3.16}$$

La primera integral en (3.16) resulta

$$\int_\eta^\xi u_x(\overline{\eta},0)d\overline{\eta} = \int_\eta^\xi \phi'(\overline{\eta})d\overline{\eta} = \phi(\xi) - \phi(\eta). \tag{3.17}$$

En la última integral volvemos a las variables originales transformando el recinto de integración, y obtenemos como solución la función

$$\begin{aligned} u(x,t) \;&=\; \frac{1}{2}\{\phi(x-at)+\phi(x+at)\} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi + \\ &+\; \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Ejemplo 3. El desplazamiento de una cuerda infinita sometida sólo a una fuerza externa $f(x,t) = \sin{(x+at)}$ es

$$u(x,t) = -\frac{t}{2a}\cos{(x+at)} + \frac{1}{2a^2}\cos x \sin at.$$

3.3 Estabilidad de las soluciones. Problema bien planteado

Generalmente en un problema físico se necesita obtener una solución única; para ello, además de la ecuación que representa el problema, es necesario conocer el contexto en el cual se produce el fenómeno. Ya se han tratado dos problemas de Cauchy para la cuerda donde el contexto estaba definido por la desviación y la velocidad en $t=0$, de aquí que a estas condiciones se las llame *condiciones iniciales*.
Más adelante consideraremos el problema de las oscilaciones de una cuerda finita, entonces el problema quedará bien definido si, además de las condiciones iniciales, se conoce el estado de los extremos de la cuerda (fijos o

en movimiento); a estas condiciones se las llama *condiciones de frontera*. Ambas condiciones, iniciales y de frontera, se denominan *condiciones de borde o de contorno*.
Se denomina *problema de contorno* a aquél que consiste en resolver una EDP sujeta a condiciones iniciales y/o de frontera.
Es importante conocer en que medida se modifica la solución a un problema dado cuando se consideran pequeñas variaciones en sus condiciones de borde; más aún en el caso de un problema experimental donde entran en juego errores de medición. A esto refiere el concepto de estabilidad.
Si la solución de un problema depende en forma continua de las condiciones de borde, se dice que el problema es *estable*. Es decir, un problema estable se caracteriza por tener pequeñas variaciones en su solución cuando se producen pequeñas variaciones en las condiciones de borde. Esto se expresa en la siguiente proposición para el problema resuelto en **3.1**.

Proposición 3.1 *El problema planteado por las ecuaciones (3.5) y (3.6) es estable si para cualquier intervalo de tiempo* $[0, t_0]$*, y* $\forall\ \epsilon$*, existe* $\delta(\epsilon, t_0)$ *tal que dos soluciones cualesquiera,* $u_1(x,t)$ *y* $u_2(x,t)$*, verifican*

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \epsilon, \qquad 0 \leq t \leq t_0, \tag{3.19}$$

cuando

$$|\phi_1(x) - \phi_2(x)| < \delta, \qquad |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta, \tag{3.20}$$

con

$$\phi_i(x) = u_i(x,0), \quad \psi_i(x) = (u_i)_t(x,0) \qquad i = 1,2. \tag{3.21}$$

Demostración: Si las condiciones iniciales varían en menos de δ, es

$$\begin{aligned}
|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \quad &\leq \quad \frac{1}{2}\{|\phi_1(x-at) - \phi_2(x-at)|+ \\
&\quad +|\phi_1(x+at) - \phi_2(x+at)|\}+ \\
&\quad +\frac{1}{a}\int_{x-at}^{x+at} |\psi_1(\xi) - \psi_2(\xi)|\, d\xi \\
&\leq \quad \frac{1}{2}\,(2\delta + 2\delta t) \ \leq \ \delta(1+t_0).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Tomando $\delta = \epsilon/(1+t_0)$ se obtiene

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \epsilon, \tag{3.23}$$

que expresa la pequeña variación en la solución.

Además de la estabilidad, para una gama bastante amplia de problemas físicos, interesa que éstos tengan solución única. Por eso se dice que un problema está *bien planteado* si

i) la solución del problema existe,
ii) la solución es única,
iii) el problema es estable.

Los problemas de Cauchy para la cuerda tratados en las secciones **3.1** y **3.2** están bien planteados si ϕ tiene derivada segunda continua y ψ tiene derivada primera continua.

3.4 Propagación en la semirrecta. Ecuación homogénea

Este problema de contorno describe los procesos de reflexión de ondas en un extremo de una cuerda, y propone resolver la ecuación de onda dadas las condiciones iniciales y el comportamiento en la frontera $x = 0$.

La condición de frontera puede ser de dos tipos, $u(0,t) = \mu(t)$ o $u_x(0,t) = \nu(t)$, determinando el 1° *problema de contorno* o el 2° *problema de contorno*, respectivamente.

El 1° problema de contorno con extremo fijo (o el 2° problema de contorno con extremo libre) consiste en hallar $u(x,t)$ tal que

$$\begin{array}{rcl} u_{tt} & = & a^2 u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq \infty, \;\; t > 0, \\ \\ u(0,t) & = & 0, \qquad (u_x(0,t) \, = \, 0), \\ u(x,0) & = & \phi(x), \quad u_t(x,0) \, = \, \psi(x), \quad x > 0. \end{array} \tag{3.24}$$

Este problema se puede resolver utilizando la solución en la recta. Para ello son necesarias las propiedades que establecen los lemas siguientes.

Lema 3.1 *Si en la fórmula de D'Alembert*

$$u(x,t) = \frac{\phi(x+at) + \phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, \tag{3.25}$$

las funciones ϕ y ψ son impares respecto a x_0 entonces $u(x_0,t) = 0$.

Demostración: Es $u(x_0,t) = 0$ pues ϕ y ψ son impares respecto a x_0, es decir, $\phi(x_0 - x) = -\phi(x_0 + x)$ y $\psi(x_0 - x) = -\psi(x_0 + x)$ para cualquier x, y ψ se integra en un intervalo simétrico respecto a x_0.

Lema 3.2 *Si en la fórmula de D'Alembert*

$$u(x,t) = \frac{\phi(x+at) + \phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \tag{3.26}$$

las funciones ϕ y ψ son pares respecto a x_0 entonces $u_x(x_0,t) = 0$.

Demostración: La paridad de ϕ, $\phi(x_0 - x) = \phi(x_0 + x)$, implica la imparidad

de su derivada, $-\phi'(x_0 - x) = \phi'(x_0 + x)$, por lo que resulta

$$u_x(x_0,t) = \frac{1}{2}\{\phi'(x_0+at)+\phi'(x_0-at)\}+\frac{1}{2a}\{\psi(x_0+at)-\psi(x_0-at)\} = 0. \quad (3.27)$$

La última ecuación ha sido obtenida mediante la fórmula de Leibnitz:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a_1(x)}^{a_2(x)} g(\xi,x)d\xi\right) = a_2'(x)g(a_2(x)) - a_1'(x)g(a_1(x)) + \int_{a_1(x)}^{a_2(x)} \frac{\partial}{\partial x}g(\xi,x)\,d\xi, \quad (3.28)$$

donde $a_1(x)$ y $a_2(x)$ son derivables en un intervalo $a < x < b$ y $g(\xi,x)$ tiene derivada respecto a x.

3.4.1 Primer problema de contorno con extremo fijo

El $1°$ problema de contorno con extremo fijo en la semirrecta es

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2u_{xx}, \quad 0 \le x \le \infty, \;\; t > 0, \\ u(0,t) &= 0, \quad t \ge 0, \\ u(x,0) &= \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x > 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Para resolverlo se prolongan ϕ y ψ a toda la recta, como funciones impares,

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(x), & x > 0 \\ -\phi(-x), & x < 0 \end{cases}, \qquad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0 \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

La solución para $-\infty \le x \le \infty$ está dada por

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)\,d\xi, \quad (3.30)$$

y en virtud del lema 3.1 es $u(0,t) = 0$. La solución en la semirrecta tiene la forma

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\begin{cases} \phi(x+at)+\phi(x-at)+\frac{1}{a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi, & t < x/a \\ \phi(x+at)-\phi(at-x)+\frac{1}{a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)d\xi, & t > x/a. \end{cases} \quad (3.31)$$

3.4.2 Segundo problema de contorno con extremo libre

El $2°$ problema de contorno con extremo libre en la semirrecta es

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2u_{xx}, \quad 0 \le x \le \infty, \;\; t \ge 0, \\ u_x(0,t) &= 0, \quad t \ge 0, \\ u(x,0) &= \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \ge 0. \end{aligned}$$

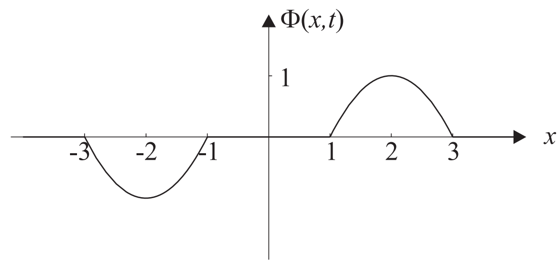


Figura 3.8: Extensión impar de $\phi(x)$ respecto de $x = 0$.

Para resolverlo se toman las prolongaciones pares de ϕ y ψ a toda la recta,

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(x), & x > 0 \\ \phi(-x), & x < 0, \end{cases} \qquad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0 \\ \psi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

y se obtiene para la cuerda no acotada la solución

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi)\, d\xi, \tag{3.32}$$

que por el lema 3.2 verifica $u_x(0,t) = 0$. La solución resulta

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\begin{cases} \phi(x+at) + \phi(x-at) + \frac{1}{a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, & t < x/a \\ \\ \phi(x+at) + \phi(at-x) + \frac{1}{a}\int_0^{at-x} \psi(\xi) d\xi + \\ +\frac{1}{a}\int_0^{at+x} \psi(\xi) d\xi, & t > x/a \end{cases}. \tag{3.33}$$

A fin de justificar los argumentos utilizados para la resolución de problemas en la semirrecta mediante la solución en la recta, resulta útil graficar el caso de una cuerda semi-infinita, fija en $x = 0$ y excitada por una deflexión inicial $\phi(x)$. Se extiende $\phi(x)$ para $x < 0$ como función impar, tal como lo ilustra la figura 3.8.

Para $t > 0$ la desviación inicial se divide en dos ondas que se desplazan en sentido opuesto con velocidad constante (ver figura 3.9).

Las ondas que pasan por $x = 0$ son las que contribuyen al proceso de reflexión en el extremo fijo de la cuerda semi-infinita como se ilustra en la figura 3.10.

Ejemplo 4. Consideremos un cable semi-infinito con extremo libre en $x = 0$, al cual se le imparte una velocidad inicial longitudinal igual a v_0 sobre el

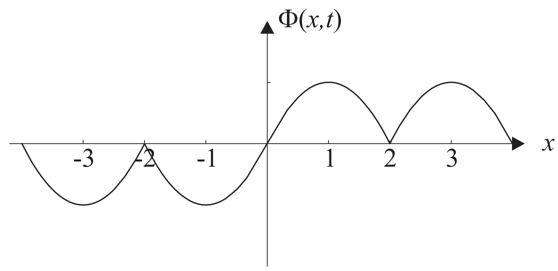


Figura 3.9: Desviación para $t = 1/a$.

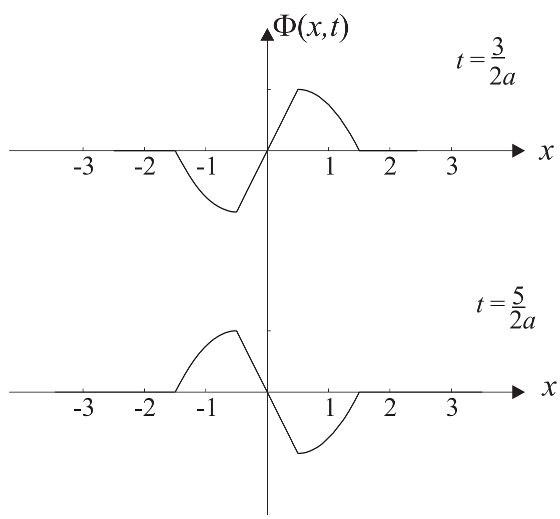


Figura 3.10: Reflexión en el extremo de la cuerda semi-infinita.

segmento $[c, 2c]$ e igual a cero fuera de él. Obtendremos $u(x,t)$ para $t = 0, c/a, 2c/a, 3c/a$.

A fin de satisfacer la condición de extremo libre, $u_x(0,t) = 0$, prolongamos las condiciones iniciales en forma par y proponemos la solución para la recta (en virtud del lema 3.2).
Con $\Phi(x) = 0$, y

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0, & |x| < c \\ v_0, & c < |x| < 2c \\ 0, & 2c < |x|, \end{cases}$$

se obtiene la solución en la recta:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi)\, d\xi.$$

Llamando

$$\Psi_1(x) = \tfrac{1}{2a}\int_{-2c}^{x} \Psi(\xi)\, d\xi \;=\; \tfrac{v_0}{2a} \begin{cases} 0, & x < -2c \\ (x+2c), & -2c < x < -c \\ c, & -c < x < c \\ x, & c < x < 2c \\ 2c, & 2c < x, \end{cases}$$

la solución es

$$u(x,t) = \Psi_1(x+at) - \Psi_1(x-at).$$

En el instante inicial la desviación es igual a cero, $u(x,0) = 0$. En los instantes $t = c/a,\ t = 2c/a$ y $t = 3c/a$, se obtienen

$$u(x, c/a) = \tfrac{v_0}{2a}, \begin{cases} x, & 0 < x < c \\ c, & c < x < 2c \\ (3c - x), & 2c < x < 3c \\ 0, & 3c < x, \end{cases}$$

$$u(x, 2c/a) = \tfrac{v_0}{2a} \begin{cases} (2c - x), & 0 < x < c \\ c, & c < x < 3c \\ (4c - x), & 3c < x < 4c \\ 0, & 4c < x, \end{cases}$$

$$u(x, 3c/a) = \tfrac{v_0}{2a} \begin{cases} 2c, & 0 < x < c \\ (3c - x), & c < x < 2c \\ c, & 2c < x < 4c \\ (5c - x), & 4c < x < 5c \\ 0, & 5c < x. \end{cases}$$

Estas funciones se grafican en las figuras 3.11 y 3.12.
Notemos que al inicio, en $x > 0$, el proceso transcurre igual que en la cuerda infinita. Luego, la onda se refleja - con la misma fase - en el extremo libre.

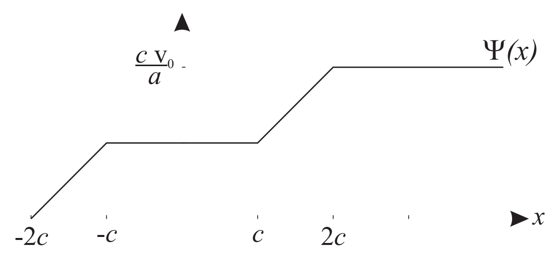


Figura 3.11: Gráfica de $\Psi_1(x)$.

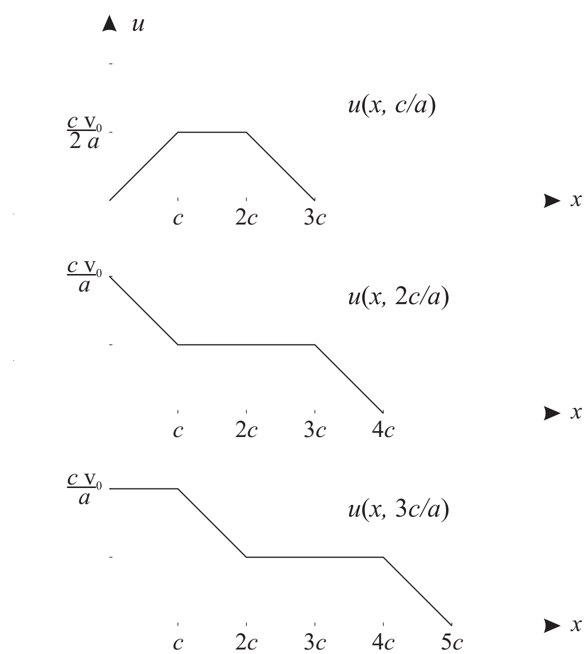


Figura 3.12: Gráfica de $u(x, t)$ para los instantes $t = c/a$, $2c/a$, $3c/a$.

3.4.3 Primer problema general de contorno

El 1° problema general de contorno para la semirrecta con condiciones iniciales nulas es

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le \infty, \quad t \ge 0, \\
u(x,0) &= u_t(x,0) = 0, \quad x \ge 0, \\
u(0,t) &= \mu(t), \quad t > 0.
\end{aligned} \tag{3.34}
$$

Se observa que la condición de frontera genera una onda que se desplaza a la derecha con velocidad a, por lo tanto la solución tiene la forma

$$u(x,t) = f(x - at). \tag{3.35}$$

Al imponer la condición de frontera

$$u(0,t) = f(-at) = \mu(t), \tag{3.36}$$

se determina f:

$$f(x) = \mu\left(-\frac{x}{a}\right), \tag{3.37}$$

de donde

$$u(x,t) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right), \qquad t > \frac{x}{a} \ge 0. \tag{3.38}$$

Dado que μ está definida sólo para valores positivos del argumento, se la puede extender para $t \le 0$ de modo que la solución verifique las condiciones iniciales,

$$\overline{\mu}(t) = \begin{cases} \mu(t), & t > 0 \\ 0, & t \le 0. \end{cases} \tag{3.39}$$

La solución es entonces

$$u(x,t) = \overline{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right), \qquad x > 0, \quad t > 0. \tag{3.40}$$

3.4.4 Segundo problema general de contorno

El 2° problema general de contorno con condiciones iniciales nulas es

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le \infty, \quad t > 0, \\
u(x,0) &= u_t(x,0) = 0, \quad x \ge 0, \\
u_x(0,t) &= \nu(t), \quad t > 0.
\end{aligned} \tag{3.41}
$$

Se propone como solución la onda

$$u(x,t) = f(x - at), \tag{3.42}$$

obteniendo

$$u_x(0,t) = f'(-at) = \nu(t), \tag{3.43}$$

o sea

$$f'(-y) = \nu\left(\frac{y}{a}\right). \tag{3.44}$$

Extendiendo ν para argumentos negativos

$$\overline{\nu}(t) = \begin{cases} \nu(t), & t > 0 \\ 0, & t \leq 0, \end{cases} \tag{3.45}$$

puede calcularse

$$f(-y) = -\int_0^y \overline{\nu}\left(\frac{\xi}{a}\right) d\xi + C. \tag{3.46}$$

La solución se representa por

$$u(x,t) = -a \int_0^{t-\frac{x}{a}} \overline{\nu}(\tau) d\tau. \tag{3.47}$$

Notar que para que se cumpla $u(x,0) = 0$ para $x \geq 0$ debe ser $C = 0$.

3.5 Propagación en la semirrecta. Ecuación no homogénea

Las soluciones obtenidas para la propagación en la recta pueden ser utilizadas para resolver algunos problemas en la semirrecta si se prolongan en forma adecuada las condiciones de borde y la inhomogeneidad según corresponda. Para el problema inhomogéneo en la semirrecta resulta de utilidad el lema que sigue.

Lema 3.3 *Dado el problema*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad -\infty \leq x \leq \infty, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) &= u_t(x,0) = 0, \qquad -\infty < x < \infty, \end{aligned} \tag{3.48}$$

si $f(x,t)$ es función impar de x respecto del origen entonces $u(0,t) = 0$, y si es función par de x respecto del origen entonces $u_x(0,t) = 0$.

Demostración: La solución en la recta de la ecuación inhomogénea con condiciones iniciales nulas es

$$u(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau. \tag{3.49}$$

Luego, si $f(x,t)$ es una función impar de x se tiene

$$u(0,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\ \ d\xi\, d\tau = 0, \tag{3.50}$$

pues la función impar se integra sobre un intervalo simétrico respecto del origen.
En virtud de la fórmula de derivación de Leibnitz se obtiene

$$u_x(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t \{f(x+a(t-\tau),\tau) - f(x-a(t-\tau),\tau)\}\,d\tau, \tag{3.51}$$

y, si $f(x,t)$ es una función par de x, en $x=0$ resulta

$$u_x(0,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t \{f(a(t-\tau),\tau) - f(-a(t-\tau),\tau)\}\,d\tau = 0. \tag{3.52}$$

Las condiciones $u(0,t)=0$ y $u_x(0,t)=0$ corresponden a los casos de *extremo fijo y libre* respectivamente, para una cuerda semi-infinita.

3.5.1 Primer problema de contorno con extremo fijo y condiciones iniciales homogéneas

El 1° problema de contorno con extremo fijo y condiciones iniciales nulas se escribe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad x \geq 0, \quad t > 0, \\ u(0,t) &= 0, \qquad t > 0, \\ u(x,0) &= u_t(x,0) = 0, \qquad x \geq 0. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Si se extiende f como una función impar respecto del origen,

$$F(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & x > 0 \\ -f(-x,t), & x < 0, \end{cases} \tag{3.54}$$

la solución del problema en la recta viene dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\xi,\tau)\,d\xi d\tau, \tag{3.55}$$

que satisface $u(0,t)=0$ (en virtud del lema 3.3).
Para $t < x/a$, la solución en la semirrecta coincide con la solución en la recta con $F=f$.
Para $t > x/a$ puede ser $(x-at+a\tau) < 0$, o $(x-at+a\tau) > 0$, es decir, $0 < \tau < (t-x/a)$ o $\tau > (t-x/a)$ respectivamente; la solución es entonces

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2a}\int_0^{t-\frac{x}{a}} d\tau \left(-\int_{x-a(t-\tau)}^{0} f(-\xi,\tau)\,d\xi + \int_0^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi \right) + \\ &+ \frac{1}{2a}\int_{t-\frac{x}{a}}^{t} d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau) d\xi \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\int_0^{t-\frac{x}{a}} d\tau \int_{a(t-\tau)-x}^{a(t-\tau)+x} f(\xi,\tau)d\xi + \int_{t-\frac{x}{a}}^{t} d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\right). \tag{3.56}$$

Resumiendo,

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\begin{cases} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, & t < x/a \\ \\ \int_0^{t-\frac{x}{a}} \int_{a(t-\tau)-x}^{a(t-\tau)+x} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + \\ + \int_{t-\frac{x}{a}}^{t} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, & t > x/a. \end{cases} \tag{3.57}$$

3.5.2 Segundo problema de contorno con extremo libre y condiciones iniciales homogéneas

El 2° problema de contorno con extremo libre y condiciones iniciales nulas consiste en hallar u tal que

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x \geq 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= u_t(x,0) = 0, \quad x \geq 0, \\ u_x(0,t) &= 0, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Si se extiende f como función par de x,

$$F(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & x > 0 \\ f(-x,t), & x < 0, \end{cases} \tag{3.59}$$

teniendo en cuenta el lema 3.3, la solución del consiguiente problema en la recta es

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\xi,\tau)\,d\xi, \tag{3.60}$$

con $u_x(0,t) = 0$, que coincide con la solución en la semirrecta cuando $t < x/a$. Para $t > x/a$ puede ser $(x - at + a\tau) < 0$, o $(x - at + a\tau) > 0$, lo que se traduce en $0 < \tau < (t - \frac{x}{a})$, o $\tau > (t - \frac{x}{a})$ y por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2a}\int_0^{t-\frac{x}{a}} d\tau \left(\int_{x-a(t-\tau)}^{0} f(-\xi,\tau)d\xi + \int_0^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi\right) + \\ &+ \frac{1}{2a}\int_{t-\frac{x}{a}}^{t} d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Resumiendo estos resultados se obtiene la solución del problema (3.58):

$$
u(x,t)=\frac{1}{2a}\begin{cases}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi, & t<x/a\\ \\ \int_0^{t-\frac{x}{a}} d\tau\left(\int_0^{a(t-\tau)-x} f(\xi,\tau)d\xi+\int_0^{a(t-\tau)+x} f(\xi,\tau)d\xi\right)+ & \\ \int_{t-\frac{x}{a}}^{t} d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi, & t>x/a.\end{cases}\qquad (3.62)
$$

Como consecuencia de lo analizado, y utilizando el principio de superposición (tratado en el apéndice **C**), quedan resueltos los problemas que se presentan a continuación.

3.5.3 Primer problema de contorno para la semirrecta

El 1° problema de contorno para la semirrecta se escribe

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= a^2u_{xx}+f(x,t), \quad x\geq 0, \quad t>0,\\
u(x,0) &= \phi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x), \quad x\geq 0,\\
u(0,t) &= \mu(t), \quad t>0,
\end{aligned}\qquad (3.63)
$$

y su solución es

$$
u(x,t)=\begin{cases}\frac{\phi(x+at)+\phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+ & \\ +\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi, & t<x/a\\ \\ \frac{\phi(at+x)-\phi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x}\psi(\xi)d\xi+\mu(t-\frac{x}{a})+ & \\ +\frac{1}{2a}\{\int_0^{t-\frac{x}{a}} d\tau\int_{a(t-\tau)-x}^{a(t-\tau)+x} f(\xi,\tau)d\xi+ & \\ +\int_{t-\frac{x}{a}}^{t} d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi\}, & t>x/a.\end{cases}\qquad (3.64)
$$

3.5.4 Segundo problema de contorno para la semirrecta

La solución al 2° problema de contorno para la semirrecta,

$$
u_{tt} = a^2u_{xx}+f(x,t), \quad x\geq 0, \quad t>0,
$$

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= \phi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x), \qquad x\geq 0,\\
u_x(0,t) &= \nu(t), \qquad t>0,
\end{aligned} \tag{3.65}
$$

es

$$
u(x,t)=\begin{cases}
\frac{\phi(x+at)+\phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi + \\
+\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi, & t<x/a\\
\\
\frac{\phi(at+x)+\phi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\{\int_0^{at-x}\psi(\xi)d\xi+\int_0^{at+x}\psi(\xi)d\xi\}+\\
+\frac{1}{2a}\int_0^{t-\frac{x}{a}} d\tau\{\int_0^{a(t-\tau)-x} f(\xi,\tau)d\xi+\int_0^{a(t-\tau)+x} f(\xi,\tau)d\xi\}+\\
+\frac{1}{2a}\{\int_{t-\frac{x}{a}}^{t} d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi\}-a\int_0^{t-\frac{x}{a}}\nu(\tau)d\tau, & t>x/a.
\end{cases} \tag{3.66}
$$

En las soluciones de los dos problemas anteriores observamos que la perturbación que actúa en el extremo $x=0$ se manifiesta una vez superado el instante $t=x/a$.

3.6 Oscilaciones en el segmento $(0,l)$. Ecuación homogénea

En la presente sección se trata el problema de una cuerda vibrante de longitud l con condiciones en ambos extremos.

3.6.1 Extremos fijos

Hallar las vibraciones de una cuerda fija en sus extremos equivale a resolver el problema de contorno

$$
\begin{aligned}
a^2u_{xx} &= u_{tt}, \qquad 0\leq x\leq l,\\
u(x,0) &= \phi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x), \qquad 0\leq x\leq l,\\
u(0,t) &= u(l,t)=0, \qquad t>0.
\end{aligned} \tag{3.67}
$$

Este problema puede llevarse a la recta de modo que las condiciones de frontera sean nulas. Para ello es necesario extender ϕ y ψ como funciones impares respecto de $x=0$ y de $x=l$ (según el lema 3.1). Sean Φ y Ψ tales prolongaciones, esto significa que Φ verifica

$$\begin{cases} \Phi(x) = -\Phi(-x) \\ \Phi(l+x) = -\Phi(l-x), \end{cases} \tag{3.68}$$

es decir,

$$\begin{cases} \Phi(x) = -\Phi(-x) \\ \Phi(x) = -\Phi(2l-x), \end{cases} \tag{3.69}$$

lo que implica que $\Phi(x) = \Phi(2l+x)$, es decir $\Phi(x)$ es periódica de período $2l$ de modo que admite el desarrollo senoidal de Fourier (ver apéndice **B**):

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{3.70}$$

con

$$\phi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{l} d\xi. \tag{3.71}$$

Análogamente para Ψ se tiene que $\Psi(x) = \Psi(2l+x)$ y es

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{3.72}$$

con

$$\psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{l} d\xi. \tag{3.73}$$

La solución al problema en la recta (tratado en la sección **3.1**) está dada por

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi, \tag{3.74}$$

con

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \left(\sin \frac{n\pi(x+at)}{l} + \sin \frac{n\pi(x-at)}{l} \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi at}{l}, \end{aligned} \tag{3.75}$$

y

$$\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi = \frac{l}{2a\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n}{n} \left(\cos \frac{n\pi(x-at)}{l} - \cos \frac{n\pi(x+at)}{l} \right) =$$

$$= \frac{l}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi at}{l}. \tag{3.76}$$

De aquí se obtiene la solución al problema planteado,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\phi_n\cos\frac{n\pi at}{l} + \frac{l\psi_n}{a\pi n}\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{3.77}$$

siendo ϕ_n y ψ_n los coeficientes de los desarrollos senoidales de Fourier de ϕ y ψ con período $2l$ dados por (3.71) y(3.73) respectivamente.

3.6.2 Extremo $x = 0$ variable

Si sólo el extremo $x = l$ está fijo, las vibraciones de la cuerda de longitud l están representadas por $u(x,t)$, solución del siguiente problema:

$$\begin{aligned} a^2u_{xx} &= u_{tt}, \quad 0 \le x \le l, \\ u(x,0) &= u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l, \\ u(0,t) &= \mu(t), \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{3.78}$$

El resultado obtenido en la sección **3.4** para la cuerda semi-infinita con condiciones iniciales nulas, provee la solución para $t < l/a$,

$$u(x,t) = \overline{\mu}(t - x/a), \tag{3.79}$$

con

$$\overline{\mu}(t) = \begin{cases} \mu(t), & t > 0 \\ 0, & t \le 0, \end{cases} \tag{3.80}$$

aunque ésta en general no satisface la condición de frontera $u(l,t) = 0$ para $t > l/a$. Si se toma la onda reflejada que viaja hacia la izquierda y que para $x = l$ es $\overline{\mu}(t-l/a)$, esta onda tiene la forma $f(x+at)$ con $f(l+at) = \overline{\mu}(t-l/a)$, por lo que f resulta ser $f(y) = \overline{\mu}(y - 2l/a)$; luego $f(x+at) = \overline{\mu}(t+x/a-2l/a)$ y la solución para $t < 2l/a$ es

$$u(x,t) = \overline{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right) - \overline{\mu}\left(t + \frac{x}{a} - \frac{2l}{a}\right). \tag{3.81}$$

El proceso se continúa tomando la onda reflejada en $x = 0$ que viaja hacia la derecha y restándole aquélla que se refleja en $x = l$ y viaja a la izquierda. Se ha considerado a la función $\overline{\mu}(t - x/a)$ como la onda que se genera por el régimen de frontera en $x = 0$, independientemente de la influencia de $x = l$, tal como si se tratara de una cuerda semi-infinita, pero en $x = l$ debe necesariamente considerarse la reflexión de la onda y luego las sucesivas reflexiones en $x = 0$ y $x = l$.

Como próximo paso consideremos la onda que viaja hacia la derecha $f(x-at)$ y que en $x = 0$ es $f(-at) = \overline{\mu}(t - 2l/a)$. Por lo tanto, $f(y) = \overline{\mu}(-y - 2l/a)$ y $f(x-at) = \overline{\mu}(t-x/a-2l/a)$, ésta llega a $x = l$ con el valor $f(l+at) = \overline{\mu}(t-3l/a)$, es decir $f(y) = \overline{\mu}(y/a - 4l/a)$ y $f(x + at) = \overline{\mu}(t + x/a - 4l/a)$.
Entonces la solución para $t < 4l/a$, es la anterior (3.81) más los términos

$$\overline{\mu}\left(t - \frac{x}{a} - \frac{2l}{a}\right) - \overline{\mu}\left(t + \frac{x}{a} - \frac{4l}{a}\right).$$

Como consecuencia de considerar las sucesivas reflexiones en los extremos, resulta que la solución al problema planteado es la serie

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\overline{\mu}\left(t - \frac{x}{a} - \frac{2nl}{a}\right) - \overline{\mu}\left(t + \frac{x}{a} - 2(n+1)\frac{l}{a}\right)\right]. \qquad (3.82)$$

Para cada t fijo sólo hay un número finito de términos no nulos pues $\overline{\mu}(t) = 0$ para $t < 0$.
Es inmediato verificar que (3.82) satisface las condiciones iniciales. Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \overline{\mu}(t) - \overline{\mu}\left(t - \frac{2l}{a}\right) + \overline{\mu}\left(t - \frac{2l}{a}\right) - ... = \mu(t), \\ u(l,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\overline{\mu}\left(t - (2n+1)\frac{l}{a}\right) - \overline{\mu}\left(t - (2n+1)\frac{l}{a}\right)\right] = 0, \qquad (3.83) \end{aligned}$$

de modo que (3.82) satisface también las condiciones de frontera.

3.6.3 Extremo $x = l$ variable

Las vibraciones de una cuerda de longitud l con condición de frontera no nula en $x = l$ se obtienen como solución del problema

$$\begin{aligned} a^2 u_{xx} &= u_{tt}, \quad 0 \le x \le l, \\ u(x,0) &= u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l, \\ u(0,t) &= 0, \quad u(l,t) = \nu(t), \qquad t > 0. \qquad (3.84) \end{aligned}$$

Este problema se resuelve con un razonamiento análogo al anterior, que conduce en este caso a la solución

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\overline{\nu}\left(t + \frac{x}{a} - (2n+1)\frac{l}{a}\right) - \overline{\nu}\left(t - \frac{x}{a} - (2n+1)\frac{l}{a}\right)\right], \qquad (3.85)$$

con $\overline{\nu}(t)$ definida en (3.45). Queda a cargo del lector la verificación de las condiciones de contorno.

3.6.4 Problema general

Utilizando el principio de superposición, se resuelve el problema lineal de las vibraciones de una cuerda de longitud l con condiciones de contorno no nulas,

$$\begin{aligned} a^2 u_{xx} &= u_{tt}, \quad 0 \leq x \leq l, \\ u(x,0) &= \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ u(0,t) &= \mu(t), \quad u(l,t) = \nu(t), \quad t > 0. \end{aligned} \tag{3.86}$$

La solución a este problema es

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \{\cos\frac{n\pi at}{l} \int_0^l \phi(\xi) \sin\frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi + \\ & + \frac{l}{a\pi n} \sin\frac{n\pi at}{l} \int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi\} \sin\frac{n\pi x}{l} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\overline{\mu}\left(t - \frac{x}{a} - 2n\frac{l}{a}\right) - \overline{\mu}\left(t + \frac{x}{a} - 2(n+1)\frac{l}{a}\right)\right] + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\overline{\nu}\left(t + \frac{x}{a} - 2(n+1)\frac{l}{a}\right) - \overline{\nu}\left(t - \frac{x}{a} - 2(n+1)\frac{l}{a}\right)\right] \end{aligned}$$

donde se definen $\overline{\mu}(t)$ y $\overline{\nu}(t)$ según (3.39) y (3.45), es decir, nulas para $t \leq 0$.

3.6.5 Unicidad de la solución

Teorema 3.1 *La solución al problema de contorno*

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad a \leq x \leq b, \quad t > 0, \tag{3.88}$$

con condiciones iniciales

$$u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{3.89}$$

y condiciones de frontera

$$u(a,t) = \mu_1(t), \quad u(b,t) = \nu_1(t), \tag{3.90}$$

o bien,

$$u_x(a,t) = \mu_2(t), \quad u_x(b,t) = \nu_2(t), \tag{3.91}$$

es única.

Demostración: Sean u_1 y u_2 dos soluciones distintas. La función $u = u_1 - u_2$ será solución de la ecuación homogénea con condiciones iniciales y de frontera nulas,

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \quad a \leq x \leq b, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= u_t(x,0) = 0, \\ u(a,t) &= u(b,t) = 0, \quad (u_x(a,t) = u_x(b,t) = 0). \end{aligned} \tag{3.92}$$

Probaremos que u es idénticamente nula. Para ello consideramos la integral

$$I(t) = \frac{1}{2}\int_a^b \left(u_x^2 + u_t^2\right)\, dx, \tag{3.93}$$

de modo que

$$\frac{d}{dt}I(t) = \int_a^b \left(u_x u_{xt} + u_t u_{tt}\right)\, dx, \tag{3.94}$$

y, en virtud de la ecuación diferencial, es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I(t) &= \int_a^b \left(u_x u_{xt} + u_t u_{xx}\right) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\left(u_x u_t\right) dx \\ &= u_x u_t\rfloor_a^b = u_x(b,t)u_t(b,t) - u_x(a,t)u_t(a,t). \end{aligned} \tag{3.95}$$

De las condiciones de frontera resulta que $u_t(a,t) = u_t(b,t) = 0$, o bien, $u_x(a,t) = u_x(b,t) = 0$, entonces

$$\frac{d}{dt}I(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad I(t) = cte. \tag{3.96}$$

En $t = 0$ es $u(x,0) = u_t(x,0) = 0,$ luego $I(t) = 0,$ y como el integrando en $I(t)$ es una función definida positiva se tiene que $u_x(x,t) = 0$ y $u_t(x,t) = 0,$ es decir, $u(x,t) = cte$. Pero $u(x,0) = 0$, entonces es $u \equiv 0$, lo que implica que $u_1 = u_2$ y la solución es única.

3.7 Oscilaciones en el segmento $(0,l)$. Ecuación no homogénea

3.7.1 Extremos fijos

Si a una cuerda fija en sus extremos se la somete a una perturbación $f(x,t)$, en cada punto x y en cada instante t, la vibración u de sus puntos es solución del problema

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l, \\ u(0,t) &= u(l,t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{3.97}$$

Teniendo presente el problema tratado en la subsección **3.6.1**, para éste proponemos un desarrollo en serie de Fourier de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{3.98}$$

con t como parámetro (ver apéndice **B**), y para obtener la solución basta hallar los coeficientes $u_n(t)$. Entonces, si desarrollamos $f(x,t)$ en serie de Fourier como función impar de x, de período $2l$, se tiene

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{3.99}$$

con

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi,t) \sin \frac{n\pi\xi}{l} d\xi. \tag{3.100}$$

y, sustituyendo las series (3.98) y (3.99) en la EDP, resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[u_n''(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 u_n(t) - f_n(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{l} = 0. \tag{3.101}$$

En virtud de la unicidad del desarrollo de Fourier, debe verificarse $\forall n$ que

$$u_n''(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 u_n(t) \;=\; f_n(t). \tag{3.102}$$

Esta es una EDO con condiciones iniciales nulas, $u_n(0) = u_n'(0) = 0$, que puede resolverse aplicando la transformada de Laplace (ver apéndice **D**),

$$s^2 U_n + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 U_n = F_n(s), \tag{3.103}$$

o bien,

$$U_n = \frac{F_n(s)}{s^2 + (\frac{an\pi}{l})^2}. \tag{3.104}$$

De aquí se obtienen los coeficientes

$$u_n(t) = \frac{l}{an\pi} \int_0^t f_n(\tau) \sin\left[\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\right] d\tau, \tag{3.105}$$

y la solución al problema planteado es

$$u(x,t) = \frac{l}{a\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \int_0^t f_n(\tau) \sin\left[\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\right] d\tau \right\} \sin \frac{an\pi x}{l}. \tag{3.106}$$

3.7.2 Problema general

El problema general de las oscilaciones de una cuerda de longitud l con todos sus puntos sometidos a perturbación consiste en hallar $u(x,t)$ tal que

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 \le x \le l, \\ \\ u(x,0) &= \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \\ u(0,t) &= \mu(t), \quad u(l,t) = \nu(t), \quad t > 0. \end{aligned} \tag{3.107}$$

La solución a este problema, dada su linealidad, puede obtenerse sumando las soluciones de los problemas resueltos en **3.6.4** y **3.7.1**.
Sin embargo, existe una alternativa de resolución que ofrece la ventaja de reducir el número de series a evaluar, lo cual en casos concretos conduce a cálculos menos complicados pues no siempre se conoce la suma de una serie. Podemos proponer una solución de la forma:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \tag{3.108}$$

y se elige v de modo que $v(0,t) = \mu(t)$ y $v(l,t) = \nu(t)$, por ejemplo

$$v(x,t) = \frac{x\nu(t) + (l-x)\mu(t)}{l}. \tag{3.109}$$

El problema en u se transforma en el problema para w:

$$\begin{aligned} w_{tt} &= a^2 w_{xx} + f(x,t) - \frac{1}{l}\{x\nu''(t) + (l-x)\mu''(t)\} = a^2 w_{xx} + \tilde{f}(x,t), \\ \\ w(x,0) &= \phi(x) - \frac{1}{l}\{x\nu(0) + (l-x)\mu(0)\} = \tilde{\phi}(x), \\ w_t(x,0) &= \psi(x) - \frac{1}{l}\{x\nu'(0) + (l-x)\mu'(0)\} = \tilde{\psi}(x), \\ w(0,t) &= w(l,t) = 0, \end{aligned} \tag{3.110}$$

que tiene como solución la suma de las soluciones a los problemas tratados en **3.6.1** y **3.7.1**.
En efecto, la solución viene dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{x\nu(t) + (l-x)\mu(t)}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{an\pi} \int_0^t \tilde{f}_n(\tau) \sin \frac{an\pi}{l}(t-\tau)d\tau \sin \frac{n\pi x}{l} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tilde{\phi}_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + \frac{l}{an\pi} \tilde{\psi}_n \sin \frac{n\pi a t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}, \end{aligned} \tag{3.111}$$

donde $\tilde{f}_n$, $\tilde{\phi}_n$, $\tilde{\psi}_n$ son los coeficientes de los desarrollos impares de Fourier en x, de $\tilde{f}$, $\tilde{\phi}$ y $\tilde{\psi}$, respectivamente.

3.7.3 Fuerza externa estacionaria

Cuando en cada punto x, $0 \leq x \leq l$, se aplica una fuerza que no depende del tiempo y las condiciones de frontera son constantes, se tiene el siguiente problema:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= \phi(x) \quad u_t(x,0) = \psi(x), \qquad 0 \leq x \leq l, \\ u(0,t) &= u_1 = cte, \quad u(l,t) = u_2 = cte, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{3.112}$$

En este caso proponemos como solución la suma

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t), \tag{3.113}$$

que reemplazada en la EDP provee para w la ecuación

$$w_{tt} = a^2(v'' + w_{xx}) + f(x,t). \tag{3.114}$$

La flexión estática de la cuerda $v(x)$, se determina de modo que responda al problema

$$\begin{aligned} a^2 v'' + f &= 0, \\ v(0) &= u_1, \quad v(l) = u_2. \end{aligned} \tag{3.115}$$

Entonces, la desviación del estado estacionario $w(x,t)$ deberá verificar que

$$\begin{aligned} w_{tt} &= a^2 w_{xx}, \\ w(x,0) &= \phi(x) - v(x) = \tilde{\phi}(x), \\ w_t(x,0) &= \psi(x), \\ w(0,t) &= w(l,t) = 0. \end{aligned} \tag{3.116}$$

Integrando dos veces se obtiene

$$v(x) = u_1 + (u_2 - u_1)\frac{x}{l} + \frac{x}{a^2 l}\int_0^l d\eta \int_0^\eta f(\xi)\, d\xi - \frac{1}{a^2}\int_0^x d\eta \int_0^\eta f(\xi)\, d\xi, \tag{3.117}$$

y la función w es la solución obtenida en **3.6.1**. Por lo tanto, la solución al problema (3.112) es

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{\phi}_n \cos\frac{n\pi a t}{l} + \frac{l}{an\pi}\psi_n \sin\frac{n\pi a t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} + u_1 + (u_2 - u_1)\frac{x}{l} \\ &+ \frac{x}{a^2 l}\int_0^l d\eta \int_0^\eta f(\xi)\, d\xi - \frac{1}{a^2}\int_0^x d\eta \int_0^\eta f(\xi)\, d\xi, \end{aligned} \tag{3.118}$$

con $\tilde{\phi}_n$ y ψ_n coeficientes del desarrollo impar en serie de Fourier de $\tilde{\phi}$ y ψ, respectivamente.

3.8 Ecuaciones lineales generales de tipo hiperbólico

El problema general a resolver en $\mathbb{R}^2$ consiste en hallar una función $u(x,y)$ tal que verifique la EDP

$$u_{xx} - u_{yy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = -f(x,y), \tag{3.119}$$

con condiciones dadas sobre una curva $\mathcal{C}$ del plano (x,y).
Antes de abordar el problema general, consideremos un problema relativamente más sencillo: hallar la función $u(x,y)$ solución de la ecuación

$$u_{yy} - u_{xx} = f(x,y), \tag{3.120}$$

con condiciones sobre una curva $\mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} u\rfloor_{\mathcal{C}} &= \phi(x), \\ u_n\rfloor_{\mathcal{C}} &= \psi(x), \end{aligned} \tag{3.121}$$

utilizando el *teorema de Green*. Dicho teorema establece que si $F(x,y)$ y $G(x,y)$ son funciones continuas y tienen derivadas primeras continuas en un dominio D, de frontera $\mathcal{F}$, entonces

$$\int\int_D (F_\xi - G_\eta)\, d\xi d\eta = \int_{\mathcal{F}} (G\, d\xi + F\, d\eta). \tag{3.122}$$

Si $u(x,y)$ es una solución de la EDP (3.120), entonces (3.122), con $F = -u_\xi$ y $G = -u_\eta$, se escribe

$$\int\int_D f(\xi,\eta) d\xi d\eta = \int_{\mathcal{F}} (-u_\xi d\eta - u_\eta d\xi), \tag{3.123}$$

donde D es la región triangular limitada por las características $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ que se cortan en el punto $P(x,y)$, y la curva $\mathcal{C}$ que las une. La figura 3.13 ilustra el dominio D con $R(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$.
Sobre $\mathcal{C}_1$ es $d\xi = d\eta$, entonces

$$\int_{\mathcal{C}_1} (-u_\xi d\eta - u_\eta d\xi) = -\int_{\mathcal{C}_1} (u_\xi d\xi + u_\eta d\eta) = -\int_{\mathcal{C}_1} du = -u(x_1,y_1) + u(x,y) \tag{3.124}$$

en tanto que sobre $\mathcal{C}_2$ es $d\xi = -d\eta$, y

$$\int_{\mathcal{C}_2} (-u_\xi d\eta - u_\eta d\xi) = \int_{\mathcal{C}_2} (u_\xi d\xi + u_\eta d\eta) = \int_{\mathcal{C}_2} du = u(x,y) - u(x_2,y_2). \tag{3.125}$$

La ecuación (3.123) se escribe

$$2u(x,y) - u(x_1,y_1) - u(x_2,y_2) - \int_{\mathcal{C}} (u_\xi d\eta + u_\eta d\xi) = \int\int_D f(\xi,\eta) d\xi d\eta, \tag{3.126}$$

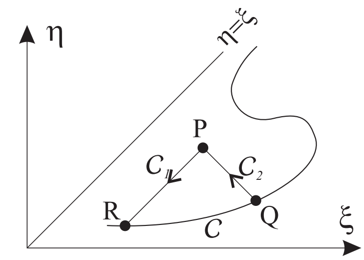


Figura 3.13: Dominio D con $R(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$.

y la solución viene dada por

$$u(x,y) = \frac{u(x_1,y_1)+u(x_2,y_2)}{2} + \frac{1}{2}\int_C (u_\xi d\eta + u_\eta d\xi) + \frac{1}{2}\int\int_D f(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{3.127}$$

donde $u_\xi\rfloor_\mathcal{C}$ y $u_\eta\rfloor_\mathcal{C}$ se obtienen mediante las fórmulas

$$u_\xi\rfloor_\mathcal{C} = \frac{\phi'(\xi)+\psi(\xi)g'(\xi)\sqrt{1+g'(\xi)^2}}{1+g'(\xi)^2},$$

$$u_\eta\rfloor_\mathcal{C} = \frac{\phi'(\xi)g'(\xi)-\psi(\xi)\sqrt{1+g'(\xi)^2}}{1+g'(\xi)^2}, \tag{3.128}$$

con $g(x)$ la ecuación de la curva $\mathcal{C}$.
La fórmula (3.127) provee la solución al problema de Cauchy siempre que $(x_2, y_2) \to (x_1, y_1)$ si (x, y) tiende a un punto de $\mathcal{C}$, es decir, si el dominio triangular D se reduce a un punto a medida que (x, y) se aproxima a la curva inicial.
Nótese que éste no es siempre el caso pues si en algún punto la pendiente de $\mathcal{C}$ es mayor que la unidad, se tendrá una situación como la que muestra la figura 3.14, donde al hacer tender (x, y) al punto R de la curva $\mathcal{C}$, $Q \to Q_1 \neq R$.
Entonces, si nos restringimos a curvas iniciales $\mathcal{C}$ cuya pendiente en valor absoluto es menor que la unidad -llamadas *curvas de tipo espacial*-, la solución del problema de Cauchy está dada por (3.127).
En tanto, puede mostrarse que para *curvas de tipo temporal*, es decir con pendientes en valor absoluto mayores que la unidad, la fórmula (3.127), en general, no provee la solución al problema de valor inicial.

3.8.1 Problema de Goursat

Se denomina de esta manera al problema de contorno para una ecuación hiperbólica donde se dan determinadas condiciones sobre dos características que se cortan en un punto.

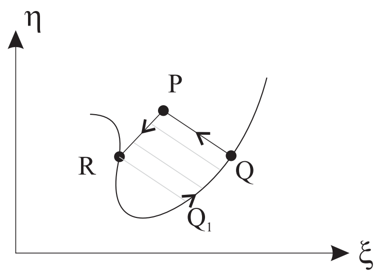


Figura 3.14: Caso en que la pendiente de $\mathcal{C}$ es mayor que 1.

Sean R y Q puntos que están sobre las características que se cortan en $P(x,y)$. El problema de Goursat consiste en hallar la solución $v(x,y)$ de la ecuación hiperbólica

$$M(v) = v_{xx} - v_{yy} - (av)_x - (bv)_y + cv = 0, \tag{3.129}$$

tal que sobre las características satisface las condiciones

$$\begin{aligned} v\rfloor_{\overline{PR}} &= \exp\left[\int_{s_0}^{s} \frac{b-a}{2\sqrt{2}} ds\right], \\ v\rfloor_{\overline{QP}} &= \exp\left[-\int_{s_0}^{s} \frac{b+a}{2\sqrt{2}} ds\right], \\ v(P) &= 1. \end{aligned} \tag{3.130}$$

La función analítica v solución de este problema se denomina *función de Riemann*.

Teorema 3.4 *La función de Riemann existe y es única.*
Demostración: De las condiciones (3.130) sobre las características consideradas en el plano (ξ,η) resultan

$$\begin{aligned} dv\rfloor_{\overline{PR}} &= v\,\frac{(b-a)}{2\sqrt{2}}\,ds \;=\; -v\,\frac{(b-a)}{2}\,d\xi, \\ dv\rfloor_{\overline{QP}} &= -v\,\frac{(b+a)}{2\sqrt{2}}\,ds \;=\; v\,\frac{(b+a)}{2}\,d\xi, \\ v(p) &= 1. \end{aligned} \tag{3.131}$$

Consideremos la región D limitada por las características $\eta - \xi = y_1 - x_1$ y $\eta + \xi = y_2 + x_2$ que pasan por $R = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ y se cortan en $P(x,y)$, y las características $\eta + \xi = y_1 + x_1$ y $\eta - \xi = y_2 - x_2$ que también pasan por R y Q y se intersectan en un punto B. Entonces dicha región tiene frontera $\mathcal{F} = \overline{QP} + \overline{PR} + \overline{RB} + \overline{BQ}$. Si aplicamos el teorema de Green (3.122)

a la región D con $F = v_\xi - av$ y $G = v_\eta + bv$, resulta

$$-\int\int_D cv \, d\xi d\eta \; = \; \int_{\mathcal{F}} (v_\eta + bv) \, d\xi + (v_\xi - av) \, d\eta \; =$$

$$= \; \int_{\overline{QP}} -dv + v(b+a) \, d\xi + \int_{\overline{PR}} dv + v(b-a) \, d\xi + \int_{\overline{RB}} -dv + v(b+a) \, d\xi +$$

$$+ \; \int_{\overline{BQ}} dv + v(b-a) \, d\xi \; =$$

$$= \; \int_{\overline{QP}} dv - \int_{\overline{PR}} dv - \int_{\overline{RB}} dv + \int_{\overline{BQ}} dv + \int_{\overline{RB}} v(b+a) \, d\xi + \int_{\overline{BQ}} v(b-a) \, d\xi \; =$$

$$= \; 2v(P) - 2v(B) + \int_{\overline{RB}} v(b+a) \, d\xi \quad + \quad \int_{\overline{BQ}} v(b-a) \, d\xi, \tag{3.132}$$

lo que implica

$$v(B) = 1 + \frac{1}{2}\left[\int\int_{\overline{RB}} (b+a)v \, d\xi + \int_{\overline{BQ}} (b-a)v \, d\xi + \int\int_D cv \, d\xi d\eta\right]. \tag{3.133}$$

El segundo término de la suma (3.133) puede considerarse como un operador lineal T aplicado a la función v, y nos interesa hallar v tal que

$$v = 1 + T(v). \tag{3.134}$$

Esta ecuación puede resolverse por iteración según el esquema:

$$v_{n+1} = 1 + T(v_n), \quad v_0 = 1. \tag{3.135}$$

Demostraremos que existe el límite

$$v = \lim_{n \to \infty} v_n. \tag{3.136}$$

Para ello tomamos un entorno $\mathcal{U}$ del punto P suficientemente pequeño de modo que $\forall \; v$ se verifique

$$T(v) \leq \frac{1}{2} \max_{Q \in \mathcal{U}} |v|. \tag{3.137}$$

Además, es

$$|v_{n+1} - v_n| = |T(v_n - v_{n-1})| \leq \frac{1}{2} \max_{Q \in \mathcal{U}} |v_n - v_{n-1}|, \tag{3.138}$$

y

$$\max_{Q\in\mathcal{U}} |v_{n+1} - v_n| \le \frac{1}{2} \max_{Q\in\mathcal{U}} |v_n - v_{n-1}|. \tag{3.139}$$

Aplicando sucesivamente esta desigualdad resulta que

$$\max_{Q\in\mathcal{U}} |v_{n+1} - v_n| \le \frac{1}{2^n} \max_{Q\in\mathcal{U}} |v_1 - v_0|. \tag{3.140}$$

Si consideramos ahora la identidad

$$v_n = v_0 + \sum_{k=1}^{n} (v_k - v_{k-1}) \tag{3.141}$$

observamos que el término $\sum_{k=1}^{n}(v_k - v_{k-1})$ es la suma parcial de una serie que tiene como mayorante a la serie geométrica $\max|v_1 - v_0| \sum_{k=1}^{n} (1/2)^{k-1}$, que es convergente por lo tanto v_n converge uniformemente a v en $\mathcal{U}$.
La función v es solución de la ecuación (3.133) dado que

$$1 + T(v) = 1 + T\left(\lim_{n\to\infty} v_n\right) = 1 + \lim_{n\to\infty} T(v_n) = \lim_{n\to\infty} v_n = v. \tag{3.142}$$

Esta solución es única pues si suponemos que existen dos soluciones v_1, v_2, su diferencia verifica

$$v_1 - v_2 = T(v_1 - v_2), \tag{3.143}$$

y en $\mathcal{U}$ es $|T(v_1 - v_2)| \le \frac{1}{2} \max|v_1 - v_2|$, por lo cual

$$\max|v_1 - v_2| \le \frac{1}{2} \max|v_1 - v_2|, \tag{3.144}$$

desigualdad que implica que $v_1 - v_2 \equiv 0$, es decir $v_1 = v_2$ y la solución es única.

3.8.2 Método de Riemann

Este método provee una solución para la EDP de tipo hiperbólico

$$L(u) = u_{xx} - u_{yy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = -f(x,y), \tag{3.145}$$

con condiciones dadas sobre una curva en el plano.
Se presentan previamente algunos resultados relativos a los operadores diferenciales lineales $L(u)$ definido en (3.145) y $M(v)$ dado por

$$M(v) = v_{xx} - v_{yy} - (av)_x - (bv)_y + cv. \tag{3.146}$$

Los operadores L y M se dicen *conjugados o adjuntos* si verifican la relación

$$vL(u) - uM(v) = H_x + K_y, \tag{3.147}$$

con H y K funciones que dependen de u, v y sus derivadas de primer orden. Si $L = M$, L se dice *autoadjunto o autoconjugado*.
Si multiplicamos $L(u)$ por v y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} vu_{xx} &= (vu_x)_x - (v_x u)_x + uv_{xx}, \\ vu_{yy} &= (vu_y)_y - (v_y u)_y + uv_{yy}, \\ vau_x &= (avu)_x - u(av)_x, \\ vbu_y &= (bvu)_y - u(bv)_y, \end{aligned}$$

obtenemos que

$$vL(u) = uM(v) + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y}, \tag{3.148}$$

con

$$\begin{aligned} H &= vu_x - uv_x + avu = (vu)_x - (2v_x - av)u, \\ K &= -vu_y + uv_y + bvu = -(vu)_y + (2v_y - bv)u, \end{aligned} \tag{3.149}$$

y los operadores L y M son conjugados.
Aplicando el teorema de Green (3.122) a una región D limitada por una curva $\mathcal{F}$, se tiene

$$\int\int_D [vL(u) - uM(v)] d\xi d\eta = \int_{\mathcal{F}} (H d\eta - K d\xi). \tag{3.150}$$

Esta fórmula es el punto de partida para resolver el problema que consiste en hallar la función u que verifica la EDP hiperbólica

$$L(u) = u_{xx} - u_{yy} + au_x + bu_y + cu = -f(x, y), \tag{3.151}$$

y tal que sobre la curva $\mathcal{C}$, u y su derivada normal toman valores dados,

$$u\rfloor_{\mathcal{C}} = \phi(x), \quad u_n\rfloor_{\mathcal{C}} = \psi(x). \tag{3.152}$$

Sea $\mathcal{C}$ de ecuación $y = g(x)$ derivable y tal que $|g'(x)| < 1$. Consideramos la región D delimitada por las características que pasan por $P(x, y)$ y por el arco de la curva $\mathcal{C}$ que une los puntos R y Q en los que las características cortan a $\mathcal{C}$ (ver figura 3.13), y se calcula

$$\int\int_D [vL(u) - uM(v)]\ d\xi d\eta = \int_{\overline{PR} + \widehat{RQ} + \overline{QP}} (H d\eta - K d\xi). \tag{3.153}$$

Las integrales sobre las características se pueden transformar sabiendo que

$$\begin{aligned} sobre\ \overline{QP} \quad &: \quad d\xi \ = \ -d\eta \ = \ -\frac{ds}{\sqrt{2}}, \\ sobre\ \overline{PR} \quad &: \quad d\xi \ = \ d\eta \ = \ -\frac{ds}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{3.154}$$

Luego,

$$\int_{\overline{QP}}(Hd\eta - Kd\xi) = \int_{\overline{QP}}(vu)_\xi d\eta + (vu)_\eta d\xi - 2(v_\xi d\eta + v_\eta d\xi)u$$

$$+ad\eta - ad\xi uv =$$

$$= -\int_{\overline{QP}} d(uv) + \int_{\overline{QP}}\left(2\frac{dv}{ds} + \frac{a+b}{\sqrt{2}}\,v\right) uds =$$

$$= -(uv)(P) + (uv)(Q)$$

$$+ \int_{\overline{QP}}\left(2\frac{dv}{ds} + \frac{a+b}{\sqrt{2}}\,v\right) u\,ds. \tag{3.155}$$

En forma análoga,

$$\int_{\overline{PR}} Hd\eta - Kd\xi = -(uv)(P) + (uv)(R) - \int_{\overline{PR}}\left(2\frac{dv}{ds} - \frac{a-b}{\sqrt{2}}\,v\right) uds. \tag{3.156}$$

De aquí resulta

$$\int\int_D [vL(u) - uM(v)]\,d\xi d\eta = \int_{\widehat{RQ}}(Hd\eta - Kd\xi) - 2(uv)(P) + (uv)(Q) +$$

$$+(uv)(R) + \int_{\overline{QP}}\left(2\frac{dv}{ds} + \frac{a+b}{\sqrt{2}}\,v\right) uds - \int_{\overline{PR}}\left(2\frac{dv}{ds} - \frac{a-b}{\sqrt{2}}\,v\right) uds,$$

que equivale a

$$(uv)(P) = \frac{(uv)(Q) + (uv)(R)}{2} + \frac{1}{2}\int_{\widehat{RQ}}(Hd\eta - Kd\xi) +$$

$$+ \int_{\overline{QP}}\left(\frac{dv}{ds} + \frac{a+b}{2\sqrt{2}}\,v\right) uds - \int_{\overline{PR}}\left(\frac{dv}{ds} - \frac{a-b}{2\sqrt{2}}\,v\right) uds -$$

$$- \frac{1}{2}\int\int_D [vL(u) - uM(v)]\,d\xi d\eta.$$

A fin de que esta expresión sea lo más simple posible, elegimos v solución de

$$M(v) = v_{xx} - v_{yy} - (av)_x - (bv)_y + cv = 0, \tag{3.157}$$

en D, tal que sobre la característica $\overline{PR}$ verifique

$$\frac{dv}{ds} = \frac{(a-b)}{2\sqrt{2}}\,v, \tag{3.158}$$

sobre $\overline{QP}$

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{(a+b)}{2\sqrt{2}}\, v, \tag{3.159}$$

y sea $v(P) = 1$.
Es decir, v es una función de Riemann, la función de Riemann asociada a $L(u)$.
Si se denomina $s_0 = s(P)$, sobre $\overline{PR}$ resulta

$$\ln v = \int_{s_0}^{s} \frac{(a-b)}{2\sqrt{2}}\, ds + C, \tag{3.160}$$

pero como $v(P) = 1$ es $C = 0$, y

$$v = \exp\left[\int_{s_0}^{s} \frac{(a-b)}{2\sqrt{2}}\, ds\right]. \tag{3.161}$$

Este problema tiene solución única (tal como lo enuncia el teorema 3.4) y por lo tanto

$$\begin{aligned} u(P) \quad = \quad & \frac{(uv)(Q)+(uv)(R)}{2} + \frac{1}{2}\int_{\widehat{RQ}} \{v(u_\xi d\eta + u_\eta d\xi) - u(v_\xi d\eta + v_\eta d\xi) + \\ & + uv(a d\eta - b d\xi)\} + \frac{1}{2}\int\int_D v\, f\, d\xi d\eta \end{aligned} \tag{3.162}$$

que es la solución al problema (3.151)-(3.152).
Las funciones u_ξ y u_η sobre $\mathcal{C}$ pueden hallarse a partir de las fórmulas (3.128), siendo $g(x)$ la ecuación de $\mathcal{C}$.

Ejemplo 6. Por el método de Riemann hallaremos la solución al problema

$$\begin{aligned} a^2 u_{xx} - u_{tt} &= -f(x,t), \qquad -\infty < x < \infty,\ t \geq 0 \\ u(x,0) &= \phi(x), \\ u_t(x,0) &= \psi(x). \end{aligned}$$

Tomando $y = at$, obtenemos el problema equivalente para $U(x,y) = u(x, y/a)$

$$\begin{aligned} U_{xx} - U_{yy} &= -f_1(x,y), \\ \\ U(x,0) &= \phi(x), \\ U_y(x,0) &= \psi_1(x), \end{aligned}$$

con $f_1(x,y) = f(x,t)/a^2$ y $\psi_1(x) = \psi(x)/a$.

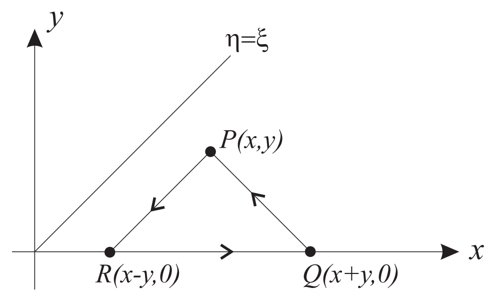


Figura 3.15: El arco $\widehat{RQ}$ es ahora un segmento del eje $y = 0$.

Sabemos que la solución está dada por

$$\begin{aligned}(Uv)(P) &= \frac{(Uv)(Q)+(Uv)(R)}{2} + \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\widehat{RQ}} [v(U_\xi d\eta + U_\eta d\xi) - U(v_\xi d\eta + v_\eta d\xi) + Uv(ad\eta - bd\xi)] + \\ &+ \frac{1}{2}\int\int_D v f_1 d\xi d\eta,\end{aligned}$$

donde el arco $\widehat{RQ}$ es ahora un segmento del eje $y = 0$ que indicaremos con $\overline{RQ}$ (ver figura 3.15).
El operador $L(U) = U_{xx} - U_{yy}$ es autoconjugado, $L(U) = M(v)$.
Como $a = b = 0$, v es igual a la unidad sobre las características $\overline{PR}$ y $\overline{QP}$, y entonces es $v \equiv 1$.
Considerando además que sobre $\overline{RQ}$ es $d\eta = 0$, resulta

$$U(P) = \frac{U(Q)+U(R)}{2} + \frac{1}{2}\int_{\overline{RQ}} U_\eta d\xi + \frac{1}{2}\int\int_D f_1\, d\xi d\eta,$$

o bien,

$$\begin{aligned}U(x,y) &= \frac{\phi(x-y)+\phi(x+y)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} \psi_1(\xi)d\xi + \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^y \int_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} f_1(\xi,\eta)d\xi d\eta.\end{aligned}$$

Notemos que al volver a $u(x,t)$ obtenemos (3.18) y, en el caso en que $f(x,t) = 0$, la fórmula de D'Alembert; en efecto, es

$$u(x,t) = \frac{\phi(x-at)+\phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi +$$

$$+ \quad \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Ejemplo 7. Aplicaremos el método de Riemann a fin de resolver el problema con condiciones iniciales para la forma general de la ecuación no homogénea con coeficientes constantes

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_{yy} + cu &= -f(x,y), \qquad -\infty < x < \infty, \;\; y > 0, \\ u(x,0) &= \phi(x), \\ u_y(x,0) &= \psi(x). \end{aligned}$$

La determinación de u se reduce a escribir la función de Riemann $v(x,y;\xi,\eta)$, la que deberá satisfacer:

i) $v_{xx} - v_{yy} + cv = 0$,

ii) $v = 1$ sobre la característica $\overline{PR}$,

iii) $v = 1$ sobre la característica $\overline{PQ}$.

Pondremos

$$v \, = \, V(z), \quad z = \sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2},$$

y dejamos como ejercicio al lector el verificar que la ecuación para $V(z)$ toma la forma

$$V'' \, + \, \frac{1}{z}V' \, + \, cV \, = \, 0,$$

con la condición $V(0) = 1$. En efecto, notemos que sobre las características $\overline{PR}$ y $\overline{PQ}$ es $z = 0$.

La solución de esta ecuación es la función de Bessel de orden nulo (apéndice **E**),

$$V = J_0(\sqrt{c}\, z),$$

o bien

$$v(x,y;\xi,\eta) = J_0\left(\sqrt{c[(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2]}\right).$$

La solución $u(x,y)$ viene dada por

$$u(P) = \frac{u(R)+u(Q)}{2} + \frac{1}{2}\int_{\overline{RQ}} (vu_\eta - uv_\eta)\, d\xi + \frac{1}{2}\int\int_D vf \; d\xi d\eta,$$

pues $d\eta = 0$.

La integral sobre el segmento $\overline{RQ}$ es

$$\begin{aligned}\int_{\overline{RQ}}(vu_\eta - uv_\eta)\ d\xi &= \int_{x-y}^{x+y}\{J_0\left(\sqrt{c[(x-\xi)^2-y^2]}\right)u_\eta(\xi,0)- \\ &- u(\xi,0)J_0'\left(\sqrt{c[(x-\xi)^2-y^2]}\right)\frac{cy}{\sqrt{c[(x-\xi)^2-y^2]}}\}\,d\xi,\end{aligned}$$

de modo que, en virtud de

$$J_0'(x) = -J_1(x)$$

con $J_1(x)$ función de Bessel de orden 1 (ver apéndice **E**), y usando las condiciones iniciales obtenemos

$$\begin{aligned}u(x,y) &= \frac{\phi(x-y)+\phi(x+y)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}J_0\left(\sqrt{c\,[(x-\xi)^2-y^2]}\right)\,\psi(\xi)\,d\xi+ \\ &+ \frac{1}{2}\,cy\int_{x-y}^{x+y}\frac{J_1\left(\sqrt{c\,[(x-\xi)^2-y^2]}\right)}{\sqrt{c[(x-\xi)^2-y^2]}}\,\phi(\xi)\,d\xi\,+ \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^y\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}J_0\left(\sqrt{c\,[(x-\xi)^2-(y-\eta)^2]}\right)\,f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta.\end{aligned}$$

Si es $c=0$, haciendo $y=at$ reobtenemos la fórmula de D'Alembert,

$$u(x,t)=\frac{\phi(x-at)+\phi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\overline{\psi}(x)\,d\xi,$$

que da la solución al problema de las oscilaciones en la cuerda infinita,

$$u_{xx}-\frac{1}{a^2}u_{tt}=0,$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}u(x,0) &= \phi(x), \\ u_t(x,0) &= \overline{\psi}(x)=a\psi(x)=au_y(x,0).\end{aligned}$$

3.9 Problemas propuestos

1- Una cuerda infinita es sometida a una deformación inicial dada por

$$\phi(x)=\begin{cases}1-x^2, & |x|<1\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

a) Hallar el desplazamiento de la cuerda en $t=1/a$ y representar gráficamente.

b) Hallar el movimiento de $x = 0$ y representar gráficamente.
c) Dividir el plano de las fases (x, t) según las características que pasan por $x = 1$ y $x = -1$. Imaginar como viajan las ondas ϕ y que valores inciden en cada región.

2- A una cuerda infinita se le imparte una velocidad inicial transversal $v_0 = cte$, sobre una sección $-1 \leq x \leq 1$. Graficar la posición de la cuerda para $t = 0,\ 1/2a,\ 1/a$.

3- Hallar el desplazamiento de una cuerda infinita sometida sólo a una fuerza continua $f(x,t) = sen(x + at)$.

4- A una cable semi-infinito con extremo fijo en $x = 0$ se le imparte una velocidad inicial longitudinal igual a $v_0 = cte$ sobre el segmento $c \leq x \leq 2c$ y nula fuera de él. Graficar $u(x,t)$ para $t = 0,\ c/a,\ 2c/a,\ 3c/a$.

5- Una onda $u(x,t) = f(x + at)$ viaja a lo largo de una cuerda semi-infinita. Hallar las vibraciones de la cuerda si su extremo
a) está fijo,
b) está libre.

6- Probar que si $f(x,t)$ en el problema

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),$$

donde $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$, con $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$, es función impar de x entonces $u(0,t) = 0$ y si es función par de x, entonces $u_x(0,t) = 0$.

7- Resolver

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),$$

con $x > 0$, $t > 0$, si $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$ y $u(0,t) = 0$.
Considerar el caso particular en que $f(x,t) = xexp(-t)$.

8- Resolver

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),$$

donde $x > 0$, $t > 0$, si $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$ y $u_x(0,t) = 0$.

9- Resolver el problema de las vibraciones longitudinales de un cable con extremo fijo en $x = 0$ y el extremo $x = l$ libre, si el cable tiene una extensión inicial $u(x,0) = Ax$ para $0 \leq x \leq l$ y la velocidad inicial es nula.

10- Resolver el problema de las oscilaciones de una cuerda bajo la acción de una fuerza externa estacionaria $f(x) = exp(x)$ y tal que $u(0,t) = 1$, $u(1,t) = 2$, siendo la longitud de la cuerda $l = 1$.

11- Resolver por el método de separación de variables la ecuación

$$u_{tt} = 4u_{xx},$$

con $0 \leq x \leq 1$ y las condiciones $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 2\cos^2(\pi x)$ y $u(0,t) = u_x(1,t) = 0$.

12- Resolver la ecuación

$$u_{tt} - 2u_t + u = a^2 u_{xx} + A \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

con $0 \leq x \leq l$, y las condiciones $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = u_x(l,t) = 0$.

13- Resolver la ecuación

$$u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy} = 0,$$

de modo que sobre las características $L1 : x - y = 0$ y $L2 : 5x - y = 0$ tome los valores $u_{L1} = \alpha(x)$, $u_{L2} = \beta(x)$, con $\alpha(0) = \beta(0)$.

14- Verificar directamente que la fórmula

$$v(x,t) = J_0\left(\mu\sqrt{(x+t-\alpha)(x-t-\beta)}\right),$$

(función de Riemann) es solución de la ecuación

$$v_{xx} - v_{tt} + \mu^2 v = 0.$$

Sugerencia: $J_0'(x) = -J_1(x)$ y $[xJ_1(x)]' = xJ_0(x)$.

15- Usando la función de Riemann expresar la solución del problema

$$u_{xx} - u_{tt} + \mu^2 u = 0,$$

con $u(x,0) = \phi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$.

16- Resolver la ecuación

$$u_{xx} - u_{yy} + au_x + bu_y + cu = 0,$$

donde a, b y c son constantes, con $-\infty < x < \infty$, $y > 0$, si $u(x,0) = \phi(x)$ y $u_y(x,0) = \psi(x)$.

17- Hallar la solución de

$$u_{tt} = u_{xx},$$

con $x \geq 0$, $k > 1$, si $u(x,0) = \phi_0(x)$, $u_t(x,0) = \phi_1(x)$ y $u(x,kx) = \psi(x)$, con $\phi_0(0) = \psi(0)$.

Soluciones a los problemas propuestos

1-a

$$u(x,1/a) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ -x(x+2) & -2 < x < 0 \\ -x(x-2) & 0 < x < 2 \\ 0 & x > 2. \end{cases}$$

1-b

$$u(0,t) = \begin{cases} 1 - a^2t^2 & 0 < t < 1/a \\ 0 & t > 1/a. \end{cases}$$

1-c

$$u(1,t) = \begin{cases} \frac{1-(1-at)^2}{2} & 0 < t < 2/a \\ 0 & t > 2/a. \end{cases}$$

3-

$$u(x,t) = -t\cos(x+at]/2a + [\sin(x+t(2-a) - \sin(x-at)]/4a$$

4-

$$u(x,0) = 0$$

$$u(x,c/a) = \begin{cases} v_0 x/2a & 0 < x < c \\ v_0 c/2a & c < x < 2c \\ v_0(3c-x)/2a & 2c < x < 3c \\ 0 & x > 3c. \end{cases}$$

$$u(x,2c/a) = \begin{cases} v_0(2c-x)/2a & 0 < x < c \\ v_0 c/2a & c < x < 3c \\ v_0(4c-x)/2a & 3c < x < 4c \\ 0 & x > 4c. \end{cases}$$

5-a

$$u(x,t) = \begin{cases} f(x+at) & t < x/a \\ f(at+x) - f(at-x) & t > x/a. \end{cases}$$

5-b

$$u(x,t) = \begin{cases} f(x+at) & t < x/a \\ f(at+x) + f(at-x) - f(0) & t > x/a. \end{cases}$$

7-

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\begin{cases}\int_0^{t-x/a}d\tau\int_{a(t-\tau)-x}^{a(t-\tau)+x}f(\xi,\eta)d\xi+\int_{t-x/a}^{t}d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\eta)d\xi, & t>x/a\\ \\ \int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\eta)d\xi & t<x/a.\end{cases}$$

$$u(x,t)=x(t-1+e^{-t})$$

8-

$$u(x,t)=\left\{\int_0^{t-x/a}d\tau\left[\int_0^{a(t-\tau)-x}f(\xi,\eta)d\xi+\int_0^{a(t-\tau)+x}f(\xi,\eta)d\xi\right]\right\}/2a+$$

$$+\left\{\int_{t-x/a}^{t}d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\eta)d\xi\right\}/2a;\quad t>x/a$$

$$u(x,t)=\left\{\int_0^{t}d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\eta)d\xi\right\}/2a;\quad t<x/a$$

9-

$$u(x,t)=\frac{8Al}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{2l}\right)\cos\left(\frac{n\pi at}{2l}\right)$$

10-

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n\sin(n\pi x)\cos(n\pi at)+[a^2+1-e^x+x(a^2+e-1]/a^2$$

con

$$\phi_n=\frac{2}{\pi n}\left[1+\frac{e-1}{a^2(1+n^2\pi^2)}-(-1)^n2\right]$$

11-

$$u(x,t)=t+\cos(2\pi x)\sin(4\pi t)$$

12-

$$u(x,t)=\frac{Al}{a\pi}\frac{l^2}{(l^2+a^2\pi^2)}\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)\left[\frac{a\pi}{l}+e^t\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)-\frac{a\pi}{l}e^t\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)\right]$$

13-

$$u(x,y)=\phi\left(\frac{5x-y}{4}\right)+\psi\left(\frac{y-x}{4}\right)-\phi(0)$$

15-

$$u(x,t) = \frac{\phi(x+t)+\phi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} J_0\left(\mu\sqrt{(\xi-x-t)(\xi-x+t)}\right)\psi(\xi)d\xi$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \frac{\phi(\xi)\mu t}{\sqrt{(\xi-x-t)(\xi-x+t)}} J_1\left(\mu\sqrt{(\xi-x-t)(\xi-x+t)}\right)d\xi$$

16-

$$u(x,y) = \frac{\phi(x+y)e^{(b+a)y/2}+\phi(x-y)e^{(b-a)y/2}}{2} +$$

$$+\frac{e^{by/2}}{2}\int_{x-y}^{x+y}\left(\frac{-b}{2}J_0(B)+\frac{\sqrt{k}y}{\sqrt{B}}J_1(B)\right)\phi(\xi)e^{-a(x-\xi)/2}d\xi$$

$$+\frac{e^{by/2}}{2}\int_{x-y}^{x+y} J_0(B)\phi(\xi)e^{-a(x-\xi)/2}d\xi,$$

con

$$B = \sqrt{k(\xi-x-y)(\xi-x+y)}$$

17-

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{\phi_0(x+y)+\phi_0(x-y)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\phi_1(\xi)d\xi & x \geq t \\ \psi\left(\frac{t+x}{k+1}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{k^2+1}\right)+\psi\left(\frac{t-x}{k-1}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{k^2+1}\right)+\frac{1-k^2}{(1+k^2)^{3/2}}\left[\psi\left(\frac{t+x}{k-1}\right)-\psi\left(\frac{t-x}{k-1}\right)\right]- & \\ -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\left[\int_{\frac{(k+1)(t-x)}{(k-1)}}^{t+x}\phi_1(\xi)d\xi+\phi_0(t+x)-\phi_0\left((k+1)(t-x)/(k-1)\right)\right] & x < t. \end{cases}$$

Capítulo 4

Ecuaciones parabólicas en una dimensión

La ecuación parabólica en una variable espacial,

$$u_{xx} - u_t + b(x,t)u_x + c(x,t)u = f(x,t), \tag{4.1}$$

representa procesos de conducción del calor o de difusión.

4.1 Definición de solución de un problema de contorno

El 1° *problema de contorno* para la ecuación homogénea en un intervalo espacial finito consiste en resolver

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \tag{4.2}$$

con la condición inicial

$$u(x,0) = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{4.3}$$

y las condiciones de frontera

$$u(0,t) = \mu(t), \quad u(l,t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{4.4}$$

Para considerar aquellos problemas de interés físico resulta conveniente precisar la definición de *solución* a fin de tener un problema bien planteado. En efecto, notemos por ejemplo, que si se entendiera por solución una función u que verifique la ecuación y las condiciones de contorno en las regiones que indica el problema, entonces la función definida por:

$$u(x,t) \;=\; c, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

$$\begin{array}{rcll} u(x,0) & = & \phi(x), & 0 \le x \le l, \\ u(0,t) & = & \mu(t), & u(l,t) = \nu(t), \quad 0 \le t \le T, \end{array} \tag{4.5}$$

con c una constante arbitraria, sería solución, aún cuando $\phi(x) \neq c$, $\mu(t) \neq c$ o $\nu(t) \neq c$; y en ese caso el problema tendría infinitas soluciones. Procuremos pues una definición de solución que nos garantice tener un problema bien planteado. Diremos entonces que entendemos por *solución del* 1° *problema de contorno* propuesto, una función $u(x,t)$ tal que

i) $u(x,t)$ es continua en la región cerrada:

$$0 \le x \le l,\, 0 \le t \le T.$$

ii) $u(x,t)$ satisface la ecuación (4.2) en la región abierta:

$$0 < x < l,\, 0 < t < T.$$

iii) $u(x,t)$ satisface la condición inicial y las condiciones de frontera, con $\phi(x)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$ funciones continuas que verifican las llamadas *condiciones de conjunción*:

$$\phi(0) = \mu(0),\, \phi(l) = \nu(0).$$

Notemos que las condiciones de conjunción están ya implícitas en la condición *i)*, pero resulta conveniente explicitarlas dado que las funciones ϕ, μ y ν pueden elegirse libremente.

4.2 Unicidad y estabilidad del primer problema de contorno para una región acotada

Un resultado físico coherente con el problema de la conducción del calor en una barra finita cuando no actúan fuentes externas, y que nos permitirá demostrar la unicidad de la solución al 1° problema de contorno en el segmento, es el siguiente teorema.

Teorema del valor máximo. *Si la función* $u(x,t)$ *es continua en la región* $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$*, y satisface la ecuación* $u_t = a^2 u_{xx}$ *en* $0 < x < l$, $0 < t < T$*, entonces* u *toma sus valores máximo y mínimo en el instante inicial* $t = 0$*, o en los puntos de la frontera o extremos* $x = 0$, $x = l$*.*

En este problema denominaremos contorno al conjunto:

$$C = \{(x,0); 0 \le x \le l\} \cup \{(0,t),(l,t); 0 \le t < T\}.$$

Demostración: Procedemos por vía del absurdo. Sea M el valor máximo de u en el contorno y supongamos que existe un punto (x_0,t_0) no perteneciente a C, es decir $0 < x_0 < l,\ 0 < t_0 \le T$, tal que $u(x_0,t_0) = M + \epsilon$.

Definimos una función auxiliar v dada por

$$v(x,t) \,=\, u(x,t) \,+\, k\,(t_0 - t), \tag{4.6}$$

con $k > 0$ y que verifica la condición $k(t_0 - t) \le kT < \epsilon/2$, o sea $k < \epsilon/2T$. Esta función v está acotada en C; en efecto,

$$v(x,t) \le M + \frac{\epsilon}{2}, \tag{4.7}$$

y cumple que $v(x_0,t_0) = u(x_0,t_0) = M + \epsilon$.
Por ser continua, v alcanza su valor máximo en un punto (x_1,t_1), con $0 < x_1 < l$, $0 < t_1 \leq T$, y será

$$v(x_1,t_1) \geq v(x_0,t_0) = M + \epsilon. \tag{4.8}$$

Las condiciones de máximo en la región mencionada implican que

$$\begin{aligned} v_{xx}(x_1,t_1) &= u_{xx}(x_1,t_1) \leq 0, \\ u_t(x_1,t_1) &= v_t(x_1,t_1) + k \geq k > 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Esto significa que la ecuación $u_t = a^2 u_{xx}$ no se satisface en el punto interior (x_1,t_1), lo que contradice la hipótesis del teorema. En consecuencia, el máximo se alcanza en puntos de C.
Si consideramos la función $-u$, ésta toma su valor máximo en C, entonces u alcanza su *mínimo* en C.

Teorema de unicidad. *Si el 1° problema de contorno para la ecuación homogénea en un intervalo tiene solución, ésta es única.*
Demostración: Sean u_1 y u_2 soluciones del problema definido en **4.1** y sea $u = u_1 - u_2$. La función u es solución de la ecuación homogénea con condiciones de contorno nulas: $u(x,0) = 0$, $u(0,t) = u(l,t) = 0$. Pero por el teorema del valor máximo es $u \equiv 0$, es decir $u_1 = u_2$.

Los dos lemas que demostramos a continuación conducen a determinar la estabilidad del 1° problema de contorno para la ecuación homogénea en un intervalo.

Lema 4.1 *Si dos soluciones u_1, u_2 de la ecuación homogénea $u_t = a^2 u_{xx}$ verifican $u_1 \leq u_2$ en la frontera C, entonces $u_1(x,t) \leq u_2(x,t)$ para $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$.*
Demostración: Sea $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, entonces v es solución de la ecuación homogénea y $v \leq 0$ en C, entonces por el teorema del valor máximo, es $v \leq 0$ en $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$.

Lema 4.2 *Si dos soluciones u_1, u_2 de la ecuación homogénea $u_t = a^2 u_{xx}$ verifican $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \epsilon$ en C, entonces $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \epsilon$ para $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$.*
Demostración: Las funciones $v = u_1 - u_2$, $v_1 = -\epsilon$, $v_2 = \epsilon$ son soluciones de la ecuación homogénea y $v_1 \leq v \leq v_2$ en C, entonces por el lema 4.1 es $v_1 \leq v \leq v_2$ en $0 \leq x \leq l,\ 0 \leq t \leq T$.

Como corolario del lema 4.2 se concluye que la solución del primer problema de contorno para la ecuación homogénea en un intervalo depende en forma continua de las condiciones de contorno, es decir, es un problema *estable*. Si este problema tiene solución, entonces es un *problema bien planteado*.

4.3 Solución del primer problema de contorno para una barra finita

El problema general representa la propagación del calor en una barra de longitud l, $0 \leq x \leq l$, donde cada punto x está a una temperatura inicial $\phi(x)$. A los puntos de la barra se les suministra calor mediante una fuente externa $f(x,t)$, $0 < x < l$, $t > 0$ y a los extremos, mediante fuentes de calor $\mu(t)$ y $\nu(t)$, respectivamente.

Ecuación homogénea con condiciones de frontera nulas

Este problema consiste en resolver la ecuación

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{4.10}$$

con las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \phi(x), \qquad 0 \leq x \leq l, \\ u(0,t) &= u(l,t) = 0, \qquad t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

En virtud del método de separación de variables (apéndice **C**) escribimos la solución como el producto $u = f(x)g(t)$. Reemplazando en (4.10) y separando los términos que contienen a las variables independientes x y t, obtenemos

$$\frac{g'}{a^2 g} = \frac{f''}{f} = -\lambda^2. \tag{4.12}$$

Notemos que la constante de separación debe ser negativa a fin de responder a la realidad física del problema. En efecto, en caso contrario, la temperatura crecería exponencialmente con el tiempo.
Las dos EDO resultantes

$$\begin{aligned} f'' + \lambda^2 f &= 0, \\ g' + (a\lambda)^2 g &= 0, \end{aligned} \tag{4.13}$$

dan como posibles soluciones a la familia

$$u_\lambda(x,t) = (A_\lambda \cos \lambda x + B_\lambda \sin \lambda x)\, e^{-a^2\lambda^2 t}. \tag{4.14}$$

Teniendo en cuenta las condiciones de frontera, deben ser

$$A_\lambda = 0, \qquad \sin \lambda l = 0. \tag{4.15}$$

y según la última condición, los valores de λ deben satisfacer $\lambda l = n\pi$.

Por principio de superposición proponemos como solución a la función

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l}\; e^{-(an\pi/l)^2 t}, \tag{4.16}$$

tal que

$$u(x,0) = \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{4.17}$$

Este desarrollo de Fourier (apéndice **B**) converge a $\phi(x)$ en el intervalo $(0,l)$, y representa su prolongación impar y periódica a toda la recta. Los coeficientes se calculan mediante la expresión

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi, \tag{4.18}$$

quedando así determinada la solución

$$u(x,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^l \phi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l} d\xi\right)\sin\frac{n\pi x}{l}\; e^{-(an\pi/l)^2 t}. \tag{4.19}$$

Puede demostrarse que esta función es solución en el sentido definido en $\mathbf{4.1}$.

Hemos arribado a la solución por el método clásico de separación de variables pero podríamos haber obtenido este resultado proponiendo una solución de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{4.20}$$

pues las condiciones de frontera nulas sugieren el desarollo senoidal de Fourier, tomando a t como parámetro.

Ecuación completa con condiciones de contorno nulas

Resolveremos la ecuación

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{4.21}$$

con condiciones de borde nulas

$$u(x,0) = u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 \le x \le l, \quad t \ge 0, \tag{4.22}$$

para lo cual proponemos como solución la serie de Fourier:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{4.23}$$

Si extendemos a $f(x,t)$ como función impar de x respecto de $x=0$ y $x=l$, es

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{4.24}$$

con

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\,\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi. \tag{4.25}$$

Sustituyendo según (4.23) y (4.24) en (4.21) obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[u_n'+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 u_n-f_n\right]\ \sin\frac{n\pi x}{l}=0; \tag{4.26}$$

y por la unicidad del desarrollo de Fourier resulta que

$$u_n'+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 u_n-f_n=0. \tag{4.27}$$

Resolviendo esta ecuación por el método de la transformada de Laplace (apéndice **D**), con la condición inicial $u_n(0)=0$, y denotando con $\mathcal{L}\{f_n\}=F_n$, se obtiene

$$\mathcal{L}\{u_n\}=U_n=\frac{F_n}{s+(\frac{an\pi}{l})^2}, \tag{4.28}$$

y tomando la transformada inversa resulta

$$u_n=\int_0^t f_n(\tau)e^{-(\frac{an\pi}{l})^2(t-\tau)}d\tau. \tag{4.29}$$

Por lo tanto es

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t f_n(\tau)\,e^{-(\frac{an\pi}{l})^2(t-\tau)}d\tau\right)\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{4.30}$$

o bien, en términos de los datos del problema,

$$u(x,t)=\frac{2}{l}\int_0^t\int_0^l\left(\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\frac{an\pi}{l})^2(t-\tau)}\,\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\ f(\xi,\tau)\ d\xi d\tau. \tag{4.31}$$

Problema general en el segmento

El problema general en la barra finita consiste en resolver la ecuación

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad 0<x<l,t>0, \tag{4.32}$$

con condición inicial

$$u(x,0)=\phi(x),\quad 0\le x\le l, \tag{4.33}$$

y condiciones de frontera

$$u(0,t) = \mu(t), \;\; u(l,t) = \nu(t), \quad t \geq 0. \tag{4.34}$$

Recurrimos a una función auxiliar, $w(x,t) = u(x,t) + v(x,t)$, de modo que $v(x,t)$ sea la solución de

$$v_t = a^2 v_{xx} + \tilde{f}(x,t), \tag{4.35}$$

donde $\tilde{f}(x,t) = -f(x,t) + w_t - a^2 w_{xx}$, con las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} v(x,0) &= -\phi(x) + w(x,0) \;=\; \tilde{\phi}(x), \\ v(0,t) &= -\mu(t) + w(0,t) \;=\; 0, \\ v(l,t) &= -\nu(t) + w(l,t) \;=\; 0, \end{aligned} \tag{4.36}$$

La función $w(x,t)$ entonces deberá cumplir las condiciones de frontera

$$w(0,t) = \mu(t), \qquad w(l,t) = \nu(t), \tag{4.37}$$

para lo cual basta con definir

$$w(x,t) = \mu(t) + \frac{x}{l}\,[\nu(t) - \mu(t)]\,, \tag{4.38}$$

y resulta la solución

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mu(t) + \frac{x}{l}\,[\nu(t) - \mu(t)] - \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^l \tilde{\phi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right)d\xi\right]\; e^{-(\frac{an\pi}{l})^2 t} - \\ &- \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t\int_0^l \tilde{f}(\xi,\tau)\sin\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right)\; e^{-(\frac{an\pi}{l})^2(t-\tau)}d\xi d\tau\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \end{aligned} \tag{4.39}$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(x) &= -\phi(x) + \frac{x}{l}\,[\nu(0) - \mu(0)] + \mu(0), \\ \tilde{f}(x,t) &= -f(x,t) + \frac{x}{l}\,[\nu'(t) - \mu'(t)] + \mu'(t). \end{aligned} \tag{4.40}$$

Como ejemplo consideremos el problema de contorno

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} + f(x), \qquad 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= \phi(x), \qquad 0 \leq x \leq l, \\ u(0,t) &= u_1, \qquad u(l,t) = u_2, \qquad t > 0 \end{aligned} \tag{4.41}$$

con u_1 y u_2 constantes.

En problemas con segundo miembro estacionario es conveniente separar la solución estacionaria $v(x)$ y buscar la desviación de dicha solución, $w(x,t)$. Entonces proponemos

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t), \tag{4.42}$$

lo que permite separar el problema original en otros dos. En efecto, sustituyendo en la EDP se tiene

$$w_t = a^2(v'' + w_{xx}) + f(x), \tag{4.43}$$

y debemos hallar $v(x)$ y $w(x,t)$ tales que

$$\begin{cases} a^2 v'' = -f(x) \\ v(0) = u_1 \\ v(l) = u_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} \\ w(x,0) = \phi(x) - v(x) = \tilde{\phi}(x). \\ w(0,t) = w(l,t) = 0. \end{cases} \tag{4.44}$$

Así se obtiene

$$v = \frac{-1}{a^2}\int_0^x \int_0^\mu f(\xi)\, d\xi d\mu \;+\; C_1 x \;+\; C_2, \tag{4.45}$$

con

$$C_2 = u_1, \qquad C_1 = \frac{1}{l}(u_2 - u_1) \;+\; \frac{1}{a^2 l}\int_0^l \int_0^\mu f(\xi)\, d\xi d\mu. \tag{4.46}$$

En tanto, la función w es solución de la ecuación homogénea con extremos a temperatura nula. Finalmente, la solución de (4.41) resulta

$$\begin{aligned} u(x,t) \;&=\; u_1 \;+\; \frac{x}{l}(u_2 - u_1) \;+\; \frac{x}{a^2 l}\int_0^l \int_0^\mu f(\xi)\, d\xi d\mu \;- \\ &-\; \frac{1}{a^2}\int_0^x \int_0^\mu f(\xi)\, d\xi d\mu \;+ \\ &+\; \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^l \tilde{\phi}(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi\right)\sin\frac{n\pi x}{l}\; e^{-(an\pi/l)^2 t}. \end{aligned} \tag{4.47}$$

4.4 Propagación del calor en una barra infinita

El problema general corresponde al caso de determinar la temperatura en una barra muy larga, para la cual el calor en los extremos no influye en el experimento.

Ecuación homogénea

Sea el problema de hallar la solución acotada de la ecuación

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \tag{4.48}$$

con la condición inicial

$$u(x,0) = \phi(x), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{4.49}$$

Si $u(x,t)$ y $u_x(x,t)$ tienden a cero para x tendiendo a $\pm\infty$ y u y u_t son funciones continuas, el problema puede resolverse aplicando la transformada de Fourier (apéndice **B**). Esta es una herramienta para resolver EDP, análoga a la transformada de Laplace para EDO.
Sabiendo que la transformada de Fourier de u respecto de x, con t como parámetro, es

$$U(\lambda,t) = \mathcal{F}\{u(x,t)\}(\lambda,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(\xi,t)\, e^{-i\lambda\xi}\, d\xi, \tag{4.50}$$

y que

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right\}(\lambda,t) = (i\lambda)^n\, U(\lambda,t), \tag{4.51}$$

y transformando (4.48) obtenemos

$$U_t + a^2\lambda^2 U = 0, \tag{4.52}$$

cuya solución es

$$U(\lambda,t) = A(\lambda)\, e^{-a^2\lambda^2 t}. \tag{4.53}$$

Transformando la condición inicial resulta

$$U(\lambda,0) = \Phi(\lambda) = A(\lambda). \tag{4.54}$$

y la transformada inversa de $U(\lambda,t) = \Phi(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}$ es

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda)\, e^{-a^2\lambda^2 t + ix\lambda}\, d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi)\, e^{-[a^2\lambda^2 t - i\lambda(x-\xi)]}\, d\lambda d\xi. \end{aligned} \tag{4.55}$$

Calculamos la integral respecto de λ, teniendo en cuenta que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} d\mu = \sqrt{\pi}$. Así, tomando

$$\mu \;=\; a\lambda\sqrt{t} \,-\, i\frac{(x-\xi)}{2a\sqrt{t}}, \tag{4.56}$$

resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-[a^2\lambda^2 t - i\lambda(x-\xi)]}\, d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}\;\; e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \tag{4.57}$$

Entonces, la solución acotada es

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi)\;\; e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, d\xi, \tag{4.58}$$

que se denomina *integral de Poisson*.

Ejemplo 1. Como aplicación consideremos la ecuación de la conducción del calor

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

con la condición inicial

$$u(x,0) = \phi(x) = \begin{cases} T_1, & x > 0 \\ T_2, & x < 0. \end{cases}$$

La solución está dada por

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \phi(\xi) d\xi = \\
&= \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}} + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}} = \\
&= \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-x/2a\sqrt{at}} e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/2\sqrt{a^2t}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \\
&= \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2a\sqrt{t}} e^{-\alpha^2} d\alpha.
\end{aligned}$$

Introduciendo la función error definida por

$$Erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

con $Erf(\infty) = 1$, la solución se escribe

$$u(x,t) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{2}\, Erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right).$$

Nótese que en el punto $x = 0$ la temperatura es constante e igual al promedio de los valores iniciales a derecha e izquierda.

Ecuación completa con condición inicial nula

Sea el problema de resolver la ecuación

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \tag{4.59}$$

con la condición inicial

$$u(x,0) = 0. \tag{4.60}$$

Aplicando al problema la transformada de Fourier respecto a x obtenemos

$$U_t + (a\lambda)^2 U = F(\lambda,t), \qquad U(\lambda,0) = 0, \tag{4.61}$$

y utilizando la transformada de Laplace es

$$U(\lambda,t) = \int_0^t F(\lambda,\tau)\, e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\, d\tau. \tag{4.62}$$

De la transformada inversa resulta

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda,\tau)\, e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\, e^{ix\lambda}\, d\lambda d\tau, \tag{4.63}$$

y la solución continua y acotada al problema (4.59)-(4.60) viene dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi,\tau)\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}\, d\xi d\tau. \tag{4.64}$$

Problema general

El problema general consiste en hallar $u(x,t)$ tal que

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= \phi(x). \end{aligned} \tag{4.65}$$

La solución se obtiene sumando las soluciones a los dos problemas anteriores, es decir a (4.48)-(4.49) y (4.59)-(4.60):

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, d\xi + \\ &+ \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi,\tau)\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}\, d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{4.66}$$

La transformada de Fourier es una herramienta útil para obtener la solución de algunos problemas de contorno para EDP, pero no garantiza la unicidad de la solución, por ello demostramos el siguiente teorema.

Teorema de unicidad. *Si $u_1(x,t)$ y $u_2(x,t)$ son funciones continuas, acotadas en toda la región de variación de las variables x y t, que satisfacen la ecuación de la conducción del calor*

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \tag{4.67}$$

y la condición

$$u_1(x,0) = u_2(x,0) \qquad -\infty < x < \infty, \tag{4.68}$$

entonces

$$u_1(x,t) = u_2(x,t) \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0. \tag{4.69}$$

Demostración: Sea

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t). \tag{4.70}$$

Esta función es continua y satisface la ecuación homogénea del calor con la condición inicial nula, $v(x,0) = 0$. Además, dado que $u_1(x,t)$ y $u_2(x,t)$ son acotadas en toda la región, $|u_1(x,t)| < M$, $|u_2(x,t)| < M$, es

$$|v(x,t)| \leq |u_1(x,t)| + |u_2(x,t)| < 2M \tag{4.71}$$

en $-\infty < x < \infty$, $t \leq 0$.
Nótese que el principio del valor máximo no es aplicable en este caso puesto que se trata de una región no acotada.
Sin embargo, consideremos la región $|x| \leq L$, con $L > 0$ y la función continua

$$V(x,t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right), \tag{4.72}$$

que es solución de la ecuación del calor homogénea y verifica

$$V(x,0) \geq |v(x,0)| = 0,$$

$$V(\pm L,0) = 2M \geq v(\pm L,t). \tag{4.73}$$

Luego, en la región acotada, $|x| \leq L$, $0 \leq t \leq T$, vale el teorema del valor máximo (sección **4.2**) y en virtud del lema 4.1 y las desigualdades (4.73), las funciones $-V(x,t)$, $v(x,t)$ y $V(x,t)$ en dicha región satisfacen

$$-V(x,t) \leq v(x,t) \leq V(x,t), \tag{4.74}$$

es decir

$$-\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right) \leq v(x,t) \leq \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right). \tag{4.75}$$

Fijando los valores de x y t, y haciendo tender L a infinito, resulta $v(x,t) \equiv 0$, entonces es $u_1(x,t) = u_2(x,t)$.
En forma análoga se prueba la unicidad de la solución en la semirrecta.

4.5 Solución del primer problema de contorno para una barra semi-infinita

Este problema consiste en hallar la distribución de temperatura en las proximidades de un extremo de la barra, siendo la influencia del otro extremo casi nula.

Si la condición en la frontera $x = x_0$ es $u(x_0, t) = \mu(t)$ se tiene el 1° *problema de contorno*. En el 2° *problema de contorno* en cambio, se conoce la condición en el extremo de la forma $u_x(x_0, t) = \nu(t)$.
Consideramos la solución acotada y suponemos condiciones de contorno también acotadas.
Para la resolución del 1° problema en una barra semi-infinita recurrimos a la integral de Poisson (4.58) en virtud de la propiedad siguiente.

Lema 4.3 *Si la función $\phi(x)$ es impar entonces la integral de Poisson*

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \phi(\xi) d\xi, \tag{4.76}$$

satisface $u(0,t) = 0$.
Demostración: La integral

$$u(0,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} \phi(\xi) d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} \phi(\xi) d\xi, \tag{4.77}$$

es una integral de límites simétricos de una función impar respecto del punto medio, lo que implica que $u(0,t) = 0$.

Ecuación homogénea con condición de frontera nula

Consideremos el problema de resolver la ecuación

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad x > 0, \quad t > 0, \tag{4.78}$$

con la condición inicial

$$u(x,0) = \phi(x), \qquad x > 0, \tag{4.79}$$

y la condición de frontera

$$u(0,t) = 0, \qquad t > 0. \tag{4.80}$$

Si prolongamos $\phi(x)$ como función impar respecto de $x = 0$,

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(x) & x > 0 \\ -\phi(-x) & x < 0, \end{cases} \tag{4.81}$$

la solución de la ecuación homogénea en la recta vendrá dada por la ecuación de Poisson:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \, \Phi(\xi) \, d\xi, \tag{4.82}$$

o bien,

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left(-\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \; \phi(-\xi)\; d\xi + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \; \phi(\xi)\; d\xi \right). \quad (4.83)$$

y de aquí resulta la solución a (4.78)-(4.79)-(4.80):

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) \phi(\xi)\; d\xi. \quad (4.84)$$

Ecuación homogénea con condición inicial nula

Este problema consiste en resolver la ecuación

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad x > 0, t > 0 \quad (4.85)$$

con las siguientes condiciones de borde:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0, & x > 0, \\ u(0,t) &= \mu(t) & t > 0. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Por medio de la transformada de Laplace, $U(x,s) = \mathcal{L}\{u(x,t)\}$, pasamos a considerar el problema transformado:

$$a^2 U_{xx} - sU = 0, \qquad U(0,s) = M(s), \qquad s, a > 0, \quad (4.87)$$

cuya solución acotada está dada por

$$U(x,s) = M(s)\, e^{-\frac{\sqrt{s}}{a} x}. \quad (4.88)$$

La transformada inversa (apéndice **D**),

$$u(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \mu(\tau)\, \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\, d\tau, \quad (4.89)$$

da la solución al problema planteado.

Ecuación completa con condiciones de contorno nulas

Sea el problema de resolver la ecuación

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad x > 0, \quad t > 0, \quad (4.90)$$

con las condiciones nulas:

$$u(x,0) = u(0,t) = 0 \qquad x > 0, \quad t > 0. \quad (4.91)$$

Para ello extendemos $f(x,t)$ como función impar respecto de $x=0$

$$F(x,t) = \begin{cases} f(x,t) & x>0 \\ -f(-x,t) & x<0, \end{cases} \tag{4.92}$$

y recurrimos a la solución del problema correspondiente en la recta

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi,\tau)\, \frac{e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}\, d\xi\, d\tau, \tag{4.93}$$

que verifica $u(0,t)=0$. Se obtiene entonces

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi,\tau)\, d\xi \right) - \\ &- \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(-\xi,\tau)\, d\xi \right), \end{aligned} \tag{4.94}$$

que nos da la solución en la semirrecta,

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^{\infty} \frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right) d\xi d\tau. \tag{4.95}$$

Problema general

Este problema consiste en resolver la ecuación

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad x>0, \quad t>0, \tag{4.96}$$

con las condiciones

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \phi(x), & x>0, \\ u(0,t) &= \mu(t), & t>0. \end{aligned} \tag{4.97}$$

Por tratarse de un problema lineal se resuelve sumando las soluciones anteriores. En efecto, es

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \phi(\xi) \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) d\xi + \\ &+ \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\, d\tau + \end{aligned}$$

$$+ \quad \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right) d\xi d\tau. \tag{4.98}$$

En algunos casos particulares sin embargo, puede ser más conveniente plantear directamente la solución sin recurrir a (4.98), tal como lo ilustra el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2. Obtendremos la solución acotada de la ecuación homogénea de la conducción del calor en la región $x > 0$ que satisface

$$u(0,t) = A\cos\omega t. \tag{4.99}$$

Para ello resolveremos la ecuación con la condición de frontera $u(0,t) = Ae^{i\omega t}$, y, en virtud de la linealidad de la ecuación homogénea del calor, la parte real de la solución resultante dará la solución al problema planteado originalmente. Proponemos entonces una solución de la forma

$$u(x,t) = Ae^{\alpha x + \beta t},$$

con α y β constantes a determinar.
Sustituyendo esta función en la ecuación diferencial y utilizando la condición de frontera, se obtienen

$$a^2\alpha^2 = \beta, \quad \beta = i\omega, \tag{4.100}$$

de donde

$$\alpha = \pm\frac{\sqrt{\omega}}{a} e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{2}}\,\frac{(1+i)}{a}. \tag{4.101}$$

Entonces, es

$$u(x,t) = A\, e^{\left(\pm\sqrt{\frac{\omega}{2}}\,\frac{(1+i)}{a}\,x + i\omega t\right)}, \tag{4.102}$$

y la solución acotada resulta al considerar el signo negativo. Finalmente, tomando la parte real se tiene

$$u(x,t) = A\, e^{\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2}}\,\frac{x}{a}\right)} \cos\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2}}\,\frac{x}{a} + \omega t\right), \tag{4.103}$$

que es la solución al problema planteado.

4.6 Solución del segundo problema de contorno para una barra semi-infinita

Las soluciones se obtienen en forma análoga a las de la sección previa por lo que obviaremos detalles.

Ecuación homogénea con condición de frontera nula

Este problema consiste en resolver la ecuación

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad x > 0, \quad t > 0, \tag{4.104}$$

con las condiciones

$$\begin{array}{rcll} u(x,0) & = & \phi(x), & x > 0 \\ u_x(0,t) & = & 0, & t > 0. \end{array} \tag{4.105}$$

Si se prolonga $\phi(x)$ como función par respecto de $x = 0$ a toda la recta

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(x) & x > 0 \\ \phi(-x) & x < 0, \end{cases} \tag{4.106}$$

la solución del problema extendido es

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \, \Phi(\xi) \, d\xi, \tag{4.107}$$

que verifica $u_x(0,t) = 0$.
La solución al problema original en la semirrecta es, por tanto,

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{\infty} \phi(\xi) \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) d\xi. \tag{4.108}$$

Ecuación homogénea con condición inicial nula

Este problema consiste en resolver la ecuación

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad x > 0, \quad t > 0, \tag{4.109}$$

con las condiciones

$$\begin{array}{rcll} u(x,0) & = & 0, & x > 0 \\ u_x(0,t) & = & \mu(t), & t > 0. \end{array} \tag{4.110}$$

Aplicando la transformada de Laplace se obtiene la EDO

$$a^2 U_{xx} \,-\, sU \,=\, 0, \tag{4.111}$$

con la condición $U_x(0,s) = M(s)$. La solución acotada del problema transformado es

$$U(x,s) = -\frac{aM(s)}{\sqrt{s}}\, e^{-\sqrt{s}\frac{x}{a}}, \tag{4.112}$$

y la transformada inversa provee la solución

$$u(x,t) = -\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\, d\tau. \tag{4.113}$$

Ecuación completa con condiciones nulas

Sea el 2° problema de contorno en la semirrecta dado por la ecuación

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad x > 0, t > 0, \tag{4.114}$$

con las condiciones

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0, \qquad x > 0 \\ u_x(0,t) &= 0, \qquad t > 0. \end{aligned} \tag{4.115}$$

Si $F(x,t)$ es la extensión par respecto de $x = 0$ a toda la recta de la función $f(x,t)$, la solución del problema extendido está dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi,\tau)\, \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}\, d\xi d\tau, \tag{4.116}$$

y verifica $u_x(0,t) = 0$.
Luego, la solución para $x > 0$ es

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^{\infty} \frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right) d\xi d\tau. \tag{4.117}$$

Problema general

Este problema consiste en resolver la ecuación

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad x > 0, \quad t > 0, \tag{4.118}$$

con las condiciones

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \phi(x), \qquad x>0 \\ u_x(0,t) &= \mu(t), \qquad t>0. \end{aligned} \tag{4.119}$$

La solución es suma de las soluciones anteriores, es decir

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \phi(\xi) \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) d\xi \\ &- \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau + \\ &+ \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right) d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{4.120}$$

4.7 Función de Green asociada a la ecuación del calor

La *función de Green o función de la fuente puntual* asociada a un problema de contorno permite una interesante interpretación física de su solución matemática. En la presente sección discutiremos el concepto de función de Green en el caso de la ecuación del calor.

Función de Green asociada al problema en una barra finita

En **4.3** obtuvimos la solución para una barra de longitud finita de la ecuación del calor homogénea con condiciones de frontera nulas, expresada por la fórmula

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{2}{l} \left(\int_0^l \phi(\xi) \sin\frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi \right) \sin\frac{n\pi x}{l}\, e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} = \\ &= \int_0^l \left(\frac{2}{l} \sum_{n=1}^\infty e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi\xi}{l} \sin\frac{n\pi x}{l} \right) \phi(\xi)\, d\xi. \end{aligned} \tag{4.121}$$

La serie en el último miembro de (4.121) converge uniformemente para $x>0$, dado que tiene como mayorante a $\frac{2}{l}\sum_{n=1}^\infty e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}$, lo que justifica su conmutación con la integral.

Es así que se denomina *función de Green* asociada a la ecuación del calor para una barra finita a la serie

$$G(x,\xi;t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} \sin\frac{n\pi\xi}{l} \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{4.122}$$

Utilizando la función de Green, la solución al problema (4.10)-(4.11) se escribe

$$u(x,t) = \int_0^l G(x,\xi;t)\,\phi(\xi)\,d\xi. \tag{4.123}$$

Considerada como función de x, $G(x,\xi;t)$ describe la distribución de temperatura en la barra finita de longitud l, cuyos extremos se mantienen a temperatura nula, con temperatura inicial nula y de modo que en el instante $t = 0$ del punto $x = \xi$ se desprende una cantidad de calor unitaria.
La temperatura $u(x,t)$ en el punto x en el instante t, se obtiene sumando la cantidad de calor $\phi(\xi)$ que aporta cada punto, distribuído por $G(x,\xi;t)$.
Si consideramos la ecuación completa con condiciones de contorno nulas (problema (4.21)-(4.22)), hay aporte de temperatura en cada punto ξ y en cada instante τ suministrado por la fuente $f(\xi,\tau)$, de modo que la solución puede escribirse en la forma:

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^l G(x,\xi;t-\tau)\,f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau, \tag{4.124}$$

que naturalmente coincide con la ecuación (4.31).

Función de Green asociada al problema en una barra infinita

La solución de la ecuación homogénea con condición inicial $\phi(x)$ es

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\ \phi(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi,t)\phi(\xi)d\xi, \tag{4.125}$$

donde se ha definido la *función de Green* asociada a la ecuación del calor para la barra infinita como

$$G(x-\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}, \tag{4.126}$$

que representa la distribución de temperatura en la barra infinita con temperatura inicial nula, cuando de $x = \xi$ se desprende en el instante $t = 0$ una cantidad de calor igual a la unidad.
Dado que $G(x-\xi,t)$ satisface la ecuación homogénea en (x,t) se la llama *solución fundamental de la ecuación de conducción del calor*.

Para la ecuación completa con condición inicial nula, (4.59)-(4.60), en términos de la función de Green, la solución se escribe

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi, t-\tau)\, f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau. \tag{4.127}$$

que coincide con (4.64).

Función de Green asociada al problema en una barra semi-infinita

Para el problema en una barra semi-infinita se utilizan los resultados de la barra infinita por lo que definiendo nuevamente como función de Green a

$$G(x-\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}, \tag{4.128}$$

y observando que

$$\frac{\partial G}{\partial \xi}\rfloor_{\xi=0} = \frac{x}{4a^3\sqrt{\pi t^3}}\, e^{\frac{-x^2}{4a^2 t}}, \tag{4.129}$$

la solución al 1° problema de contorno para la ecuación homogénea con condición inicial nula (4.85)-(4.86) puede escribirse en la forma

$$u(x,t) = 2a^2 \int_0^t \mu(\tau)\, \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, t-\tau)\, d\tau. \tag{4.130}$$

4.8 Problemas propuestos

1- Hallar la distribución de temperatura en un cable de longitud l si su extremo $x=0$ se halla a temperatura nula y la temperatura en $x=l$ varía de acuerdo a la ley $u(l,t) = At$, con A constante y $t>0$.

2- Hallar la temperatura de una barra con fuente de calor distribuida en forma continua y de densidad $tsin(\pi x/l)$ si la temperatura inicial está dada por $\phi(x) = x$ y la temperatura se mantiene nula en los extremos $x=0$ y $x=l$.

3- Resolver

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

con $u(0,t) = A\cos(\omega t)$, $u(l,t) = 0$, para $0 \le x \le l$.

4- Resolver

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x),$$

con la condición inicial $u(x,0) = \phi(x)$, y las condiciones de frontera $u(0,t) = c_0$, $u(l,t) = c_1$.

5- Resolver

$$u_t = u_{xx},$$

con la condición inicial $u(x,0) = x(l-x)$ para $0 \leq x \leq l$, y las condiciones de frontera $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$.

6- Resolver

$$u_t = 2u_{xx},$$

con la condición inicial $u(x,0) = 10\sin(4\pi x)$ para $0 \leq x \leq 5$, y las condiciones de frontera $u_x(0,t) = u_x(5,t) = 0$.

7- Resolver

$$u_{xx} + cu_x - u_t + c^2u/4 = 0,$$

si c es constante y $u(x,0) = \sin(x)e^{-cx/2}$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

8- Aplicando la transformada de Fourier resolver

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

con $u(x,0) = \phi(x)$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$.

9- Verificar directamente que la función

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t,\tau)\, d\tau,$$

con

$$v(x,t,\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi,\tau)\, d\xi,$$

y $f(x,t)$ acotada y continua en $\mathbb{R}$, $t > 0$, es solución de

$$a^2 u_{xx} = u_t - f(x,t).$$

Sugerencia: considerar que

$$\lim_{\tau \to t} v(x,t,\tau) = f(x,t).$$

10- Resolver

$$u_t = u_{xx} - t\sin(x),$$

con $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, si $u(x,0) = e^{-x}$.

11- Resolver aplicando la transformada de Laplace la ecuación

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

con $x > 0$, $t > 0$, si $u(x,0) = 0$, $u(0,t) = T$.

12- Resolver

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),$$

con $x \geq 0$, $t > 0$, si $u(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$.

13- Resolver el 2° problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

con $x \geq 0$, $t > 0$, si $u(x,0) = \phi(x)$, $u_x(0,t) = 0$.

Soluciones a los problemas propuestos

1-

$$u(x,t) = \frac{Ax}{l}\left[t + \frac{(x^2 - l^2)}{6a^2}\right] + \frac{2Al^2}{a^2\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(n+1)}}{n^3}e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

2-

$$u(x,t) = \left(\frac{l}{\pi a}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)\left[t - \frac{l^2}{\pi^2 a^2}\left(1 - e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\right)\right] +$$
$$\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(n+1)}}{n}e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

3-

$$u(x,t) = A\cos(\omega t) - \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$+\frac{2A\omega l^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{n(n^2\pi^2a^2 + \omega^2 l^2)}\left[\omega e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} - \omega\cos(\omega t) + \frac{n\pi a}{l}\sin(\omega t)\right]$$

4-

$$u(x,t) = c_0 + \frac{(c_1 - c_0)x}{l} + \int_0^l G(x,\xi;t)\left[\phi(\xi) - c_0 - \frac{\xi(c_1 - c_0)}{l}\right] d\xi +$$

$$+ \int_0^t \int_0^l G(x,\xi;t-\tau) f(\xi) d\xi d\tau$$

5-

$$u(x,t) = \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{2n\pi}{l}\right)^2 t}}{n^2} \cos\left(\frac{2n\pi x}{l}\right)$$

6-

$$u(x,t) = 10 \sin(4\pi x) e^{(-32\pi^2 t)}$$

7-

$$u(x,t) = \sin x \; e^{-(t + cx/2)}$$

8-

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi;t)\phi(\xi) d\xi$$

10-

$$u(x,t) = e^{(t-x)} + (1 - t - e^{-t}) \sin x$$

11-

$$u(x,t) = T\left[1 - Erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]$$

12-

$$u(x,t) = \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_0^{\infty} \frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \left[e^{-(x-\xi)^2/4a^2(t-\tau)} - e^{-(x+\xi)^2/4a^2(t-\tau)}\right] d\xi$$

13-

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \phi(\xi) \left[e^{-(x-\xi)^2/4a^2 t} - e^{-(x+\xi)^2/4a^2 t}\right] d\xi$$

Capítulo 5

Ecuaciones de tipo elíptico

Las ecuaciones de tipo elíptico se hallan asociadas a la descripción y estudio de procesos estacionarios o estados de equilibrio. La más conocida es la ecuación de Laplace, que en tres dimensiones presenta la forma:

$$\Delta u = 0, \tag{5.1}$$

donde Δ es el operador diferencial

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{5.2}$$

llamado *laplaciano*.

5.1 Soluciones particulares para la ecuación de Laplace

El laplaciano en coordenadas esféricas se escribe como sigue

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}. \tag{5.3}$$

Si u tiene simetría esférica, es decir, depende sólo de r, entonces la solución de la ecuación de Laplace,

$$\Delta u = \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = 0, \tag{5.4}$$

viene dada por

$$u = \frac{A}{r} + B, \tag{5.5}$$

y la función $1/r$ recibe la denominación de *solución fundamental de la ecuación de Laplace en el espacio*.

En tanto, el laplaciano en coordenadas cilíndricas es

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{5.6}$$

y para funciones con simetría cilíndrica, es decir, que sólo dependen de ρ, la solución de la ecuación de Laplace,

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) = 0, \tag{5.7}$$

es de la forma

$$u = A\ln\rho + B, \tag{5.8}$$

y la función $u = \ln(1/\rho)$ se conoce como *solución fundamental de la ecuación de Laplace en el plano*.
Las soluciones de la ecuación de Laplace, continuas y con derivadas primeras y segundas continuas en una región D, se llaman funciones *armónicas* en D y juegan un rol esencial en el desarrollo del presente capítulo, tal como se muestra en las secciones que siguen.

5.2 Fórmulas de Green

Las fórmulas de Green son de uso frecuente en la resolución de problemas que involucran ecuaciones de tipo elíptico. Se obtienen a partir de la fórmula de Gauss en el espacio según la cual, para un volumen $T \subset \mathbb{R}^3$ de frontera Σ y funciones P, Q y R continuas en $T + \Sigma$ y con derivadas continuas en T, se verifica que:

$$\begin{aligned}\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz &= \int_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS = \\ &= \iint_\Sigma Pdydz + Qdxdz + Rdxdy, \end{aligned} \tag{5.9}$$

donde α, β y γ son los ángulos determinados por la normal exterior a Σ y los ejes x, y y z, respectivamente.

Sean las funciones $u(x, y, z)$ y $v(x, y, z)$ continuas, con derivadas continuas en $T + \Sigma$, y con derivadas segundas continuas en T. Tomando

$$P = u\,v_x, \qquad Q = u\,v_y, \qquad R = u\,v_z, \tag{5.10}$$

resultan

$$\begin{aligned} P_x + Q_y + R_z &= u\,\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v, \\ P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma &= u(\nabla v \cdot \mathbf{n}) = u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}, \end{aligned} \tag{5.11}$$

con $\mathbf{n}$ la normal exterior a Σ. Reemplazando en (5.9) se obtiene la *primera fórmula de Green*:

$$\int_T u\Delta v\, dV = \int_\Sigma u\, v_{\mathbf{n}}\, dS - \int_T (\nabla u \cdot \nabla v)\ dV. \tag{5.12}$$

Si en la fórmula (5.12) se intercambian u y v resulta

$$\int_T v\Delta u\, dV = \int_\Sigma v\, u_{\mathbf{n}}\, dS - \int_T \nabla v \cdot \nabla u\, dV, \tag{5.13}$$

y si de (5.12) se resta (5.13) se obtiene la *segunda fórmula de Green*:

$$\int_T (u\Delta v - v\Delta u)\, dV = \int_\Sigma (u\, v_{\mathbf{n}} - v\, u_{\mathbf{n}})\, dS. \tag{5.14}$$

A partir de (5.14) obtendremos la fórmula fundamental de Green en el espacio. Para ello consideramos la función $v = 1/R$, donde

$$R = R_{M_0 M} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}, \tag{5.15}$$

es la distancia entre los puntos $M(x,y,z)$ y $M_0(x_0,y_0,z_0)$, que satisface la ecuación de Laplace $\forall M \neq M_0$. Sea u una función continua y con derivadas primeras continuas en $T+\Sigma$ y derivadas segundas continuas en T.
Si el punto $M_0 \notin T$, las funciones u y $1/R$ satisfacen la ecuación (5.14).
En el caso en que $M_0 \in T$, definimos una región en la que se pueda aplicar (5.14). Tomamos entonces una esfera $K_\epsilon^{M_0}$, de centro M_0 y radio ϵ, de frontera $\Sigma_\epsilon^{M_0}$. La región de continuidad de u y sus derivadas es $T - K_\epsilon^{M_0}$, con frontera $\Sigma + \Sigma_\epsilon^{M_0}$ (ver figura 5.1). Si T es abierto podemos elegir ϵ de modo que $K_\epsilon^{M_0} + \Sigma_\epsilon^{M_0} \subset T$.
Entonces, de (5.14) resulta

$$\begin{aligned} -\int_{T-K_\epsilon^{M_0}} \frac{\Delta u}{R}\, dV \quad &= \quad \int_\Sigma \left[u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right]\ dS + \\ &+ \quad \int_{\Sigma_\epsilon^{M_0}} u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{R} \right) - \int_{\Sigma_\epsilon^{M_0}} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\ dS. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Dado que $\mathbf{n}$ denota a la normal exterior a la frontera de $(T - K_\epsilon^{M_0})$, es

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{R} \right) \rfloor_{\Sigma_\epsilon^{M_0}} = -\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \right) \rfloor_{R=\epsilon} = \frac{1}{\epsilon^2}. \tag{5.17}$$

Si se aplica el teorema del valor medio a las integrales sobre $\Sigma_\epsilon^{M_0}$, y se indican con $\overline{u}$ y $\overline{\partial u/\partial \mathbf{n}}$ el valor medio de u y de $\partial u/\partial \mathbf{n}$ sobre $\Sigma_\epsilon^{M_0}$ respectivamente, resultan

$$\int_{\Sigma_\epsilon^{M_0}} u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{R} \right)\ dS \quad = \quad 4\pi\, \overline{u},$$

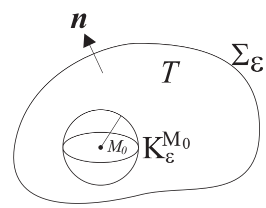


Figura 5.1: Región $T - K_\epsilon^{M_0}$ de frontera $\Sigma + \Sigma_\epsilon^{M_0}$.

$$\int_{\Sigma_\epsilon^{M_0}} \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, dS \;=\; 4\pi\epsilon\, \overline{\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}}, \tag{5.18}$$

y sustituyendo estos valores en la fórmula (5.16) se obtiene

$$-\int_{T-K_\epsilon^{M_0}} \frac{\Delta u}{R}\, dV \;=\; \int_\Sigma \left[u\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right] dS \;+\; 4\pi\,\overline{u} - 4\pi\epsilon\,\overline{\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}}. \tag{5.19}$$

Dado que u y sus derivadas primeras son continuas en T, y que

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = u_x \cos\alpha + u_y \cos\beta + u_z \cos\gamma, \tag{5.20}$$

se verifican

$$\lim_{\epsilon\to 0} \overline{u} \;=\; u(M_0), \qquad \lim_{\epsilon\to 0} 4\pi\,\epsilon\,\overline{\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}} \;=\; 0. \tag{5.21}$$

El primer miembro de la fórmula integral hallada es una integral impropia (ver apéndice **A**) y al tomar el límite para $\epsilon \to 0$ se obtiene

$$-\int_T \frac{\Delta u}{R}\, dV = \int_\Sigma \left[u\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right] dS \;+\; 4\pi u(M_0), \tag{5.22}$$

o bien,

$$\int_\Sigma \left[\frac{1}{R_{M_0M}}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{R_{M_0M}}\right)\right] dS - \int_T \frac{\Delta u}{R_{M_0M}}\, dV \;=\; 4\pi u(M_0), \tag{5.23}$$

que es la *fórmula fundamental de Green* para $M_0 \in T$, con T abierto.

Si $M_0 \in \Sigma$, y se supone que Σ tiene plano tangente que varía con continuidad, entonces se puede elegir ϵ pequeño, tal que el área de la esfera $K_\epsilon^{M_0}$ de centro en M_0 y radio ϵ que queda dentro de T sea la misma que la que queda fuera. Consideremos ahora el volumen $T - K_\epsilon^{M_0}$ de frontera $\Sigma_1 + \Sigma_2$, con $\Sigma_1 = \Sigma_\epsilon^{M_0} \cap T$ y $\Sigma_2 = \Sigma - (\Sigma \cap K_\epsilon^{M_0})$.

Entonces la fórmula de Green resulta

$$
\begin{aligned}
-\int_{T-K_\epsilon^{M_0}} \frac{\Delta u}{R}\, dV &= \int_{\Sigma_1} \left[u\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right] dS + \\
&+ \int_{\Sigma_2} \left[u\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right] dS, \qquad (5.24)
\end{aligned}
$$

con

$$
\begin{aligned}
\int_{\Sigma_1} u\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{R}\right) dS &= 2\pi \overline{u}, \\
\int_{\Sigma_1} \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, dS &= 2\pi\epsilon \overline{\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}}, \qquad (5.25)
\end{aligned}
$$

y tomando límite para $\epsilon \to 0$ se obtiene

$$
-\int_T \frac{\Delta u}{R}\, dV = \int_\Sigma \left[u\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right] dS + 2\pi u(M_0). \qquad (5.26)
$$

Esto completa la *fórmula fundamental de Green en el espacio*:

$$
\int_\Sigma \left[\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{R}\right) \right] dS - \int_T \frac{\Delta u}{R}\, dV = \begin{cases} 4\pi u(M_0), & M_0 \in T \\ 2\pi u(M_0), & M_0 \in \Sigma \\ 0, & M_0 \notin T + \Sigma, \end{cases} \qquad (5.27)
$$

considerando la región abierta T, cuya frontera Σ es una superficie con plano tangente continuo en todos los puntos.

Si u es una función armónica en T, entonces en $M_0 \in T$ la fórmula fundamental de Green es

$$
u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \left[\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{R}\right) \right] dS. \qquad (5.28)
$$

Es decir, si u es una función armónica en T, su valor en un punto M_0 interior a T se puede hallar si se conocen los valores de la función u y de su derivada normal sobre la superficie Σ, frontera de T.

Análogamente, a partir de la segunda fórmula de Green en $\mathbb{R}^2$, se obtiene la *fórmula fundamental de Green en el plano*:

$$
\int_C \left[\ln\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\ln\frac{1}{R}\right) \right] ds - \int_S \Delta u \ln\frac{1}{R}\, dS = \begin{cases} 2\pi u(M_0), & M_0 \in S \\ \pi u(M_0), & M_0 \in C \\ 0, & M_0 \notin S + C, \end{cases}
$$

donde S es una región abierta de frontera C, y u es continua, con derivadas primeras continuas en $S+C$ y derivadas segundas continuas en S.

El corolario inmediato de esta fórmula es la solución del problema de contorno para una función u armónica en una región S, con valores dados de u y $\partial u/\partial \mathbf{n}$ sobre la frontera C:

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi}\int_C \left[\ln\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\ln\frac{1}{R}\right)\right] ds, \quad M_0 \in S. \tag{5.29}$$

A continuación veremos dos resultados que involucran a la transformación de los radio-vectores inversos.
Recordemos que se llama transformación de los radio-vectores inversos respecto a una esfera de radio a, con centro en el origen O de coordenadas esféricas (r,θ,ϕ), a la transformación en la cual a cada punto $M(r,\theta,\phi)$ se le hace corresponder el punto $M'(r',\theta,\phi)$. Los puntos O, M, M' están sobre la misma recta y los radio-vectores r y r' se relacionan según la ecuación

$$rr' = a^2. \tag{5.30}$$

Sin pérdida de generalidad podemos tomar $a=1$, lo que corresponde sólo a un cambio de escala en las longitudes; la transformación resultante $r'=1/r$ suele denominarse transformación de Kelvin. En el plano, la transformación de los radio-vectores inversos se toma respecto de un círculo.

En primer término probaremos que una función u armónica en el plano (ρ,ϕ), se transforma, mediante la transformación de los radio-vectores inversos, en una función v armónica en el plano (ρ',ϕ), dada por

$$v(\rho',\phi) = u(\rho,\phi) \tag{5.31}$$

donde $\rho' = 1/\rho$.
La función $u(\rho,\phi) = v(\rho',\phi)$ es ármonica en el plano (ρ,ϕ), es decir verifica:

$$\Delta_{\rho,\phi} u = \rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\phi\phi} = 0 \tag{5.32}$$

y, transformando esta ecuación al plano (ρ',ϕ), se obtiene

$$\rho'^2 v_{\rho'\rho'} + \rho' v_{\rho'} + v_{\phi\phi} = \Delta_{\rho',\phi} v = 0. \tag{5.33}$$

Luego $v(\rho',\phi)$ es armónica.

Análogamente, puede verse que si u es una función armónica en el espacio (r,θ,ϕ), es decir, $\Delta_{r,\theta,\phi} u = 0$, entonces

$$v(r',\theta,\phi) = r\, u(r,\theta,\phi), \tag{5.34}$$

con $r' = 1/r$, satisface la ecuación de Laplace $\Delta_{r',\theta,\phi} v = 0$, es decir, v es armónica en el espacio (r',θ,ϕ).

5.3 Propiedades fundamentales de las funciones armónicas

Los teoremas que se demuestran a continuación se hallan íntimamente ligados a la resolución de problemas de contorno.

Teorema 5.1. *Si la función u es armónica en T abierto de $\mathbb{R}^3$, y Σ_1 es una superficie cerrada contenida en T, entonces*

$$\int_{\Sigma_1} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, dS = 0. \tag{5.35}$$

Demostración: Las hipótesis del teorema permiten aplicar la segunda fórmula de Green al volumen $T_1 \subset T$ limitado por Σ_1

$$\int_{T_1} (u\Delta v - v\Delta u)\, dV = \int_{\Sigma_1} (uv_{\mathbf{n}} - vu_{\mathbf{n}})\, dS, \tag{5.36}$$

y, tomando $v = 1$, resulta (5.35).

Este resultado nos permite afirmar que el problema de contorno en T con frontera Σ, que consiste en hallar u armónica en T, tal que

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\rfloor_{\Sigma} = f, \tag{5.37}$$

con f continua, sólo tiene solución si se verifica la condición $\int_{\Sigma} f dS = 0$.

Primer teorema del valor medio en $\mathbb{R}^3$. *Con las hipótesis del teorema 5.1 y siendo $\Sigma_a^{M_0}$ la superficie esférica de centro M_0 y radio a contenida en T, se verifica*

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\Sigma_a^{M_0}} u\, dS. \tag{5.38}$$

Demostración: De la fórmula fundamental de Green (5.27) aplicada a $K_a^{M_0} \subset T$ y de frontera $\Sigma_a^{M_0}$

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_a^{M_0}} \left[\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{R}\right)\right] dS, \tag{5.39}$$

y en virtud del teorema 5.1 resulta

$$u(M_0) \;=\; -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_a^{M_0}} u\; \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{R}\right) dS = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\Sigma_a^{M_0}} u\, dS. \tag{5.40}$$

Segundo teorema del valor medio en $\mathbb{R}^3$. *Con las hipótesis del teorema 5.1, si $K_a^{M_0} \subset T$ es la esfera de centro M_0 y radio a, entonces*

$$u(M_0) = \frac{3}{4\pi a^3} \int_{K_a^{M_0}} u\, dV. \tag{5.41}$$

Demostración: Si en el primer teorema del valor medio se considera una superficie esférica de radio ρ es

$$4\pi\rho^2 u(M_0) = \int_{\Sigma_\rho^{M_0}} u\, dS, \tag{5.42}$$

e integrando ambos miembros de (5.42) respecto de ρ entre 0 y a, se obtiene 5.41.

Procediendo en forma análoga para $\mathbb{R}^2$ se tienen los siguientes teoremas:
Teorema 5.2. *Si u es continua, con derivadas primeras continuas, y armónica en S, y si C es una curva cerrada contenida en S, entonces*

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, ds = 0. \tag{5.43}$$

Primer teorema del valor medio en $\mathbb{R}^2$. *Con las hipótesis del teorema 5.2 y siendo $C_a^{M_0}$ la circunferencia de centro M_0 y radio a, es*

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi a} \int_{C_a^{M_0}} u\, ds. \tag{5.44}$$

Segundo teorema del valor medio en $\mathbb{R}^2$. *Con las hipótesis del teorema 5.2 y siendo $D_a^{M_0}$ el círculo de centro M_0 y radio a contenido en S, es*

$$u(M_0) = \frac{1}{\pi a^2} \int_{D_a^{M_0}} u\, dS. \tag{5.45}$$

5.4 Problemas de contorno para la ecuación de Laplace. Unicidad y estabilidad

Veremos a continuación un teorema que resulta una herramienta útil para demostrar la unicidad de la solución de algunos problemas de contorno relativos a la ecuación de Laplace.

Teorema del valor máximo. *Sea T un conjunto abierto conexo con frontera Σ. Si u es armónica en T y es continua en $T + \Sigma$, entonces u toma sus valores máximo y mínimo en Σ, y sólo alcanza dichos valores en T cuando u es constante.*
Demostración: Si se supone que u toma su valor máximo en $M_0 \in T$, entonces $u(M_0) \geq u(M)$, $\forall M \in T + \Sigma$. Si se aplica el primer teorema del valor medio a u sobre la superficie esférica $\Sigma_\rho^{M_0} \subset T$, se tiene

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{\Sigma_\rho^{M_0}} u(M)\, dS, \tag{5.46}$$

que también puede escribirse en la forma:

$$\int_{\Sigma_\rho^{M_0}} u(M_0)\, dS = \int_{\Sigma_\rho^{M_0}} u(M)\, dS, \tag{5.47}$$

o bien,

$$\int_{\Sigma_\rho^{M_0}} [u(M_0) - u(M)]\ dS = 0, \tag{5.48}$$

y dado que $u(M_0) - u(M) \geq 0$, para $M \in \Sigma_\rho^{M_0}$, es $u(M) = u(M_0)$. Como ρ es arbitrario, se verifica que $u(M) = u(M_0)$ para $M \in K_a^{M_0}$.
Si M_1 es cualquier otro punto de T, se puede unir con M_0 por medio de una poligonal de longitud l. Sea ρ_m menor que la mínima distancia de la poligonal a la superficie Σ. Se toma una sucesión de esferas de radio ρ_m, cada una con centro en el punto donde la poligonal corta a la superficie esférica anterior comenzando en M_0. Las esferas K_{ρ_m} cubren la poligonal. Habrá a lo sumo l/ρ_m esferas tales que $u(M) = u(M_0)$, para $M \in K_{\rho_m}$ y todo m.
La última de ellas contiene a M_1, por lo que es $u(M_1) = u(M_0)$.
Se ha demostrado que $u(M) \equiv u(M_0)$, constante en T. Por continuidad de u es $u \equiv u(M_0)$, constante en $T + \Sigma$.
Por tanto, si u no es constante, toma su valor máximo en Σ.
Este resultado se extiende al mínimo de u pues es el máximo de $-u$.
El teorema del valor máximo en $\mathbb{R}^2$ se demuestra en forma enteramente análoga.

Corolario 1. Con las hipótesis del teorema del valor máximo, si $u \leq v$ en Σ entonces $u \leq v$ en T.
Demostración: Aplicando el teorema del valor máximo, si $u - v \leq 0$ en Σ entonces $u - v \leq 0$ en T.

Corolario 2. Con las hipótesis del teorema del valor máximo, si $|u| \leq v$ en Σ es $|u| \leq v$ en T.
Demostración: Si $-v \leq u \leq v$ en Σ, por el corolario 1 es $-v \leq u \leq v$ en T.

Corolario 3. Con las hipótesis del teorema del valor máximo, se verifica que

$$|u| \leq \max_{P\in\Sigma} |u|$$

en T.
Demostración: Sea $v = \max\{|u(P)|; P \in \Sigma\}$, esto implica $v \geq |u|$ en Σ y por el corolario 2 es $v \geq |u|$ en T.

Para la ecuación de Laplace se definen problemas interiores y exteriores de contorno, y se estudia su estabilidad y la unicidad de su solución.

El 1° *problema interior de contorno para la ecuación de Laplace o problema interior de Dirichlet* en una región T consiste en hallar una función u con

derivadas primeras continuas en $T + \Sigma$ y derivadas segundas continuas en T, tal que

$i)$ $\Delta u = 0$ en T,
$ii)$ u es continua en $T + \Sigma$,
$iii)$ $u\rfloor_\Sigma = f$, con f continua.

Notemos que de no imponerse la condición $ii)$ el problema tendría infinitas soluciones, pues cualquier función constante en T y que sobre Σ coincida con f sería solución.

Teorema de unicidad. *Si el $1°$ problema interior de Dirichlet en $\mathbb{R}^3$ tiene solución, la solución es única.*
Demostración: Sean u_1 y u_2 soluciones, entonces $u = u_1 - u_2$ es solución y $u\rfloor_\Sigma = 0$, con u continua en $T + \Sigma$. Por el teorema del valor máximo es $u \equiv 0$ en T, de donde $u_1 = u_2$.

Teorema de estabilidad. *El $1°$ problema interior de Dirichlet es estable.*
Demostración: Se consideran dos soluciones u_1, u_2 tales que $|u_1 - u_2| < \epsilon$ en Σ, dado que la función constante ϵ es armónica, del corolario 2 se deduce que $|u_1 - u_2| < \epsilon$ en T.

A partir de los teoremas de unicidad y estabilidad, se concluye que si el $1°$ problema interior de Dirichlet tiene solución entonces es un *problema bien planteado*.

El $1°$ problema exterior de contorno para la ecuación de Laplace en el espacio se define para funciones que *tienden uniformemente a cero en el infinito*, es decir, funciones u para las cuales existe una función $\epsilon(r)$ tal que $|u(M)| < \epsilon(r)$ y $\lim_{r\to\infty} \epsilon(r) = 0$, siendo r la distancia de M al origen.
El $1°$ *problema exterior de contorno para la ecuación de Laplace o problema exterior de Dirichlet* en la región $U \subset \mathbb{R}^3$, abierta no acotada y de frontera acotada Σ, consiste en hallar una función u con derivadas primeras continuas en $U + \Sigma$ y derivadas segundas continuas en U, tal que

$i)$ $\Delta u = 0$ en U,
$ii)$ u es continua en $U + \Sigma$,
$iii)$ $u\rfloor_\Sigma = f$,
$iv)$ u tiende uniformemente a cero en el infinito.

Nótese que es la condición $iv)$ la que garantiza la unicidad de la solución, pues por ejemplo, si se exigieran sólo las tres primeras, en el caso en que $f = u_0$ constante sobre una superficie esférica de radio a, se tendrían al menos las dos soluciones: $u = u_0$ y $u = au_0/r$.

Teorema de unicidad. *Si el $1°$ problema exterior de Dirichlet en $\mathbb{R}^3$ tiene solución, la solución es única.*
Demostración: Si u_1 y u_2 son soluciones, entonces $u = u_1 - u_2$ es armónica en U, $u\rfloor_\Sigma = 0$ y u verifica $ii)$. Si se supone que existe $Q \in U$ tal que $u(Q) = u_0 \neq 0$, puede tomarse $\epsilon = |u_0|/2$. La condición $iv)$ implica que para dicho

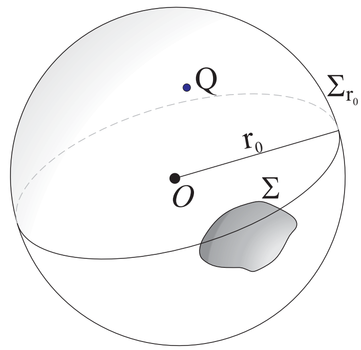


Figura 5.2: $Q \in (U \cap K^0_{r_0})$ con U región no acotada de frontera $\Sigma \subset K^0_{r_0}$.

$\epsilon > 0$ existe R_0 tal que para $r \geq R_0$ es $|u(M)| < \epsilon$. Se consideran $r_0 \geq R_0$ y la esfera con centro en el origen $K^0_{r_0}$, de modo que $Q \in (U \cap K^0_{r_0})$ y $\Sigma \subset K^0_{r_0}$, tal como lo muestra la figura 5.2. Dado que $|u|\rfloor_{\Sigma_{r_0}} < \epsilon$, y $u\rfloor_\Sigma = 0$, por el teorema del valor máximo es $|u(Q)| < \epsilon$, pero $|u(Q)| = |u_0| > \epsilon = |u_0|/2$, por lo tanto $u(Q) = 0 \; \forall Q \in U$.

El 1° *problema exterior de contorno o problema exterior de Dirichlet* en la región $V \subset \mathbb{R}^2$ abierta, no acotada y de frontera acotada C, consiste en hallar una función u con derivadas primeras continuas en $V + C$ y derivadas segundas continuas en V, tal que

$i)$ $\Delta u = 0$ en V,
$ii)$ u continua en $V + C$,
$iii)$ $u\rfloor_C = f$,
$iv)$ $|u| \leq A, \; A \in \mathbb{R}$.

La condición $iv)$ es necesaria para la unicidad de la solución. En efecto, sobre el círculo de radio a, con valor constante u_0 en su frontera, existen dos funciones armónicas, $u = u_0$ y $u = u_0 \ln(r)/\ln(a)$. No obstante, la última función se descarta como solución del problema de Dirichlet en virtud de la condición $iv)$.

Teorema de unicidad. *Si el problema exterior de Dirichlet en el plano tiene solución con derivadas segundas continuas, entonces esta solución es única.*
Demostración: Sea u la diferencia de dos soluciones $u = u_1 - u_2$, por lo tanto u es armónica en V, continua en $V + C$, $u\rfloor_C = 0$ y $|u| \leq A_1 + A_2 = B$, donde A_1 y A_2 son las cotas de u_1 y u_2, respectivamente. Se toman R_1 y R_2 tales que $D^{M_0}_{R_1} \subset \mathbb{R}^2 - V$ y $C \subset D^{M_0}_{R_2}$, y se denomina V' a la región $D^{M_0}_{R_2} \cap V$, como lo muestra la figura 5.3.
La función $\ln(1/R)$, con $R = R_{M_0M}$ la distancia entre M y M_0, es continua en V, y $\ln(R/R_1) > 0$ en $V + C$. Se deja fijo R_1 y se define la función $u_{R_2}(M) = B \ln(R/R_1)/\ln(R_2/R_1)$, armónica en V', positiva sobre C y con valor B sobre

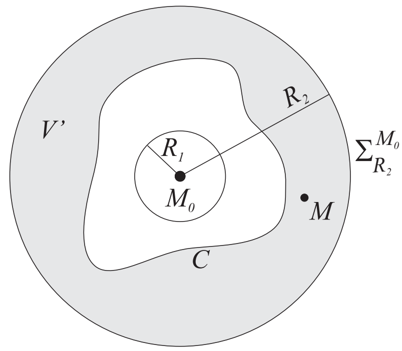


Figura 5.3: Sea V la región no acotada de frontera C; R_1 y R_2 son tales que $D_{R_1}^{M_0} \subset \mathbb{R}^2 - V$ y $C \subset V' = V \cap D_{R_2}^{M_0}$.

la circunferencia con centro en M_0 y radio R_2. Por el teorema del valor máximo es $u < u_{R_2}$ en V'; u no depende de R_2, luego, haciendo $R_2 \to \infty$, $u_{R_2} \to 0$; por lo tanto es $u \equiv 0$ en V y la solución es única.

El 2° *problema interior de contorno o problema interior de Neumann* en una región T acotada de frontera Σ, consiste en hallar una función u con derivadas primeras continuas en $T + \Sigma$ y derivadas segundas continuas en T, tal que

$i)$ $\Delta u = 0$ en T,
$ii)$ u continua en $T + \Sigma$,
$iii)$ $\partial u / \partial \mathbf{n} \rfloor_\Sigma = f$.

Teorema de unicidad relativa. *Dos soluciones del problema interior de Neumann con derivadas primeras y segundas continuas difieren en una constante.*
Demostración: Sea $u = u_1 - u_2$, con u_1, u_2 soluciones del problema, entonces u es armónica en T, continua en $T + \Sigma$ y $\partial u / \partial \mathbf{n} \rfloor_\Sigma = 0$.
Si se considera la primera fórmula de Green

$$\int_T u \Delta v \, dV = -\int_T (\nabla u \cdot \nabla v) \, dV + \int_\Sigma u \, v_{\mathbf{n}} \, dS, \tag{5.49}$$

con $v = u$, es

$$\int_T (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \, dV = 0, \tag{5.50}$$

entonces $u_x = u_y = u_z = 0$, lo que implica que u es constante.

El 2° *problema exterior de contorno o problema exterior de Neumann* en una región U no acotada, de frontera acotada Σ consiste en hallar una función u con derivadas primeras continuas en $U + \Sigma$ y derivadas segundas continuas en U, tal que

$i)$ $\Delta u = 0$ en U,

ii) u continua en $U+\Sigma$,
iii) $\partial u/\partial\mathbf{n}\rfloor_\Sigma = f$.

La unicidad de este problema se demuestra para funciones regulares en el infinito. Una función armónica u se dice *regular en el infinito* si existen R_0 suficientemente grande y $A>0$ tales que para $R\geq R_0$ se verifican $|u|<A/R$, y $|u_x|,|u_y|,|u_z|<A/R^2$.

Teorema de unicidad condicionada. *Si el 2° problema exterior de contorno tiene solución regular en el infinito, entonces dicha solución es única.*
Demostración: Sean u_1 y u_2 dos soluciones regulares en el infinito. La función $u=u_1-u_2$ es solución del problema con condición de frontera nula ($f=0$). Sean R_1 y R_2 dos números suficientemente grandes para los que se satisface la regularidad en el infinito de u_1 y u_2, respectivamente. Sean $R_0=\max\{R_1,R_2\}$ y $R\geq R_0$ tal que la esfera K_R de radio R, con centro en el origen y de frontera Σ_R, contenga al complemento de U. Considerando la primera fórmula de Green en la región $U_1=K_R\cap U$, y con $v=u$, resulta

$$\int_{U_1}(\nabla u)^2\,dV=\int_\Sigma u\,u_\mathbf{n}\,dS+\int_{\Sigma_R}u\,u_\mathbf{n}\,dS=\int_{\Sigma_R}u\,u_\mathbf{n}\,dS, \qquad (5.51)$$

pues $u_\mathbf{n}\rfloor_\Sigma=0$. La regularidad en el infinito de u implica que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Sigma_R}uu_\mathbf{n}\,dS\right| &= \left|\int_{\Sigma_R}u(u_x\cos\alpha+u_y\cos\beta+u_z\cos\gamma)\,dS\right|\leq\\ &\leq \int_{\Sigma_R}\frac{3A^2}{R^3}\,dS \;=\; 12\pi\,\frac{A^2}{R}. \end{aligned}\qquad (5.52)$$

Para $R\to\infty$ es

$$\int_{\Sigma_R}uu_\mathbf{n}\,dS=0, \qquad (5.53)$$

y por lo tanto,

$$\int_U(\nabla u)^2\,dV=0. \qquad (5.54)$$

De aquí resulta u constante en U, y como por hipótesis $\lim_{R\to\infty}|u|=0$, es $u\equiv 0$ en U y la solución es única.

Resultados y definiciones análogas valen en el plano.

5.5 Solución del primer problema de contorno en el círculo. Integral de Poisson

Hallaremos una función u armónica dentro del círculo de radio a, tal que $u\rfloor_{\rho=a}=\Phi(\phi)$, con $0\leq\phi\leq 2\pi$ y Φ continua y derivable. Paralelamente resolveremos el problema exterior, es decir, en $\rho>a$.

La ecuación de Laplace en coordenadas polares es

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0, \tag{5.55}$$

y si proponemos una solución en forma de producto,

$$u = f(\rho)g(\phi), \tag{5.56}$$

separando las variables obtenemos las EDO

$$\begin{aligned} g'' + \lambda g = 0, \\ \rho^2 f'' + \rho f' - \lambda f = 0. \end{aligned} \tag{5.57}$$

La solución de la primera ecuación es

$$g(\phi) = A\cos\sqrt{\lambda}\,\phi + B\sin\sqrt{\lambda}\,\phi, \tag{5.58}$$

y como debe verificarse que $g(\phi + 2\pi) = g(\phi)$, resulta $\sqrt{\lambda} = n$. Obtenemos así la sucesión de soluciones particulares

$$g_n(\phi) = A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi. \tag{5.59}$$

Además, las soluciones de $\rho^2 f'' + \rho f' - n^2 f = 0$ son ρ^n y ρ^{-n}; la primera es continua y acotada dentro del círculo (problema interior) y la segunda lo es fuera del círculo (problema exterior).
Entonces las soluciones particulares para $\Delta u = 0$ son

$$\begin{aligned} u_n &= \rho^n (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi), \qquad \rho \leq a, \\ u_n &= \rho^{-n} (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi), \qquad \rho \geq a, \end{aligned} \tag{5.60}$$

y por el principio de superposición se obtienen las soluciones

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi), \qquad \rho \leq a, \\ u &= \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{-n} (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi), \qquad \rho \geq a. \end{aligned} \tag{5.61}$$

Imponiendo la condición de frontera para el problema interior es

$$\begin{aligned} u(a,\phi) = \Phi(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi) = \\ = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi), \end{aligned} \tag{5.62}$$

donde a_n, b_n, son los coeficientes del desarrollo de Fourier de $\Phi(\phi)$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\alpha)\cos n\alpha \, d\alpha,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\alpha)\sin n\alpha \, d\alpha, \tag{5.63}$$

y la solución para el *problema interior* es

$$u(\rho,\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi). \tag{5.64}$$

De manera análoga resulta la solución para el *problema exterior*,

$$u(\rho,\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho}\right)^n (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi). \tag{5.65}$$

La continuidad de u se deduce de la convergencia uniforme de la serie que la define, y esta propiedad es consecuencia de la continuidad y derivabilidad de Φ.

La *integral de Poisson* para el problema interior se obtiene reescribiendo la solución (5.64) introduciendo en ella las expresiones que definen a los coeficientes de Fourier:

$$\begin{aligned} u(\rho,\phi) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\alpha)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n (\cos n\phi \cos n\alpha + \sin n\phi \sin n\alpha)\right] d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\alpha) \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n \cos\left[n(\alpha-\phi)\right]\right] d\alpha. \end{aligned} \tag{5.66}$$

Si en la última expresión denotamos con $\omega = \alpha - \phi$ y operamos:

$$\begin{aligned} 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n \cos n\omega &= -1 + 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n \cos n\omega = \\ &= -1 + 2Re\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n e^{in\omega}\right] = \\ &= -1 + 2Re\left(1 - \frac{\rho}{a}e^{i\omega}\right)^{-1} = \\ &= \frac{a^2-\rho^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\alpha-\phi)}, \qquad \frac{\rho}{a} < 1, \end{aligned} \tag{5.67}$$

la *integral de Poisson para el problema interior* resulta

$$u(\rho,\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\alpha)\,\frac{(a^2-\rho^2)}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\alpha-\phi)}\,d\alpha, \quad \rho < a, \tag{5.68}$$

siendo (5.67) el *núcleo de Poisson*.

La integral (5.68) coincide con la serie (5.64) para $\rho < a$ y la serie es una función continua en $\rho \leq a$, entonces

$$u(a,\phi) = \lim_{\rho\to a} u(\rho,\phi) = \Phi(\phi). \tag{5.69}$$

En forma análoga se obtiene la *integral de Poisson para el problema exterior*:

$$u(\rho,\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\alpha)\ \frac{(\rho^2-a^2)}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\alpha-\phi)}\ d\alpha, \quad \rho > a, \tag{5.70}$$

con $u(a,\phi) = \Phi(\phi)$.

Si se considera el problema interior con $\Phi(\phi) = 1$ entonces, por el teorema del valor máximo es $u = 1$ en el círculo $\rho < a$, y de (5.68) se obtiene el valor de la integral del núcleo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\alpha-\phi)} = \frac{2\pi}{a^2-\rho^2}. \tag{5.71}$$

La integral de Poisson resuelve los problemas en el círculo también en el caso en el que Φ es seccionalmente continua, y su solución resulta una función acotada en el círculo cerrado.

Una aplicación interesante de la integral de Poisson es el resultado siguiente: *Toda solución continua* $u(x,y)$ *de la ecuación de Laplace en una región abierta* $D \subset \mathbb{R}^2$ *es la parte real de una función analítica.*
Demostración: La función $u(x,y)$ puede representarse como una integral de Poisson en alguna circunferencia C con centro en (x_0,y_0) y radio a (a fin de simplificar la notación podemos tomar $x_0 = y_0 = 0$).
El núcleo de Poisson puede escribirse en la forma

$$\frac{(a^2-\rho^2)}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\alpha-\phi)} = -1 + 2aRe\left\{\frac{1}{a-\rho\ \exp[i(\phi-\alpha)]}\right\} =$$

$$= -1 + 2Re\left\{\frac{ia\ \exp(i\alpha)}{i[a\,exp(i\alpha) - \rho\ \exp(i\phi)]}\right\}. \tag{5.72}$$

Llamando $\beta = a\exp(i\alpha)$, $z = \rho\exp(i\phi)$, y suponiendo que $u\rfloor_{\rho=a} = \Phi(\phi)$, se tiene

$$u(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}Re\oint\frac{\Phi(\beta)}{i(\beta-z)}\,d\beta, \tag{5.73}$$

donde $\oint$ es la integral sobre la circunferencia de radio a. Entonces,

$$u(x,y) = -u(0,0) + Re\{f(z)\}, \tag{5.74}$$

con $f(z)$ analítica.

5.6 Funciones de Green asociadas a la ecuación de Laplace

Las funciones de Green proveen un camino diferente para resolver problemas de contorno. En las secciones **5.7** y **5.8** abordaremos por este método el pro-

blema para la ecuación de Laplace en una región esférica y en un subespacio (región no acotada), respectivamente.

En $\mathbb{R}^3$ la *función de Green* asociada al 1° (o 2°) problema de contorno en la región T de frontera Σ, es la función $G(M,P)$ definida en el punto $P(\xi,\eta,\zeta)$ con $M(x,y,z)$ fijo, y que satisface

i) $\Delta G = 0$ para $P \neq M$, en T,

ii) $G(M,P) = 1/4\pi R_{MP} \ + \ v(M,P)$ con v armónica en T,

iii) $G(M,P)\rfloor_\Sigma = 0,$ (o $\partial G/\partial \mathbf{n}\rfloor_\Sigma = 0$).

En $\mathbb{R}^2$ la *función de Green* asociada al 1° (o 2°) problema de contorno en la región S de frontera C es la función $G(M,P)$ definida por

i) $\Delta G = 0$ para $P \neq M$, en S,

ii) $G(M,P) = \frac{1}{2\pi}\ln(1/R_{MP}) \ + \ v(M,P)$ con v armónica en S,

iii) $G(M,P)\rfloor_C = 0,$ (o $\partial G/\partial \mathbf{n}\rfloor_C = 0$).

Si se consideran las funciones u y v armónicas en T y continuas en $T+\Sigma$, de la fórmula fundamental de Green para $M \in T$ y de la segunda fórmula de Green se obtienen

$$\begin{aligned} u(M) &= \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left[-u\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right] dS \\ 0 &= \int_\Sigma (-uv_{\mathbf{n}} + vu_{\mathbf{n}})\, dS. \end{aligned} \tag{5.75}$$

Sumando las igualdades anteriores y denotando $G = 1/4\pi R_{MP} + v(M,P)$ resulta

$$u(M) \ = \ \int_\Sigma \left(G\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}\right) dS. \tag{5.76}$$

Por lo que, en regiones acotadas, donde se pueden aplicar las fórmulas de Green, la *solución al* 1° *problema interior de contorno* en $\mathbb{R}^3$ con $u\rfloor_\Sigma = f$ es

$$u(M) \ = \ -\int_\Sigma \frac{\partial G(M,P)}{\partial \mathbf{n}} f(P)\, dS_P, \tag{5.77}$$

dado que $G\rfloor_\Sigma = 0$.

Proposición 5.1 *Si G es la función de Green para la ecuación de Laplace, entonces para el 1° problema interior de contorno en $T+\Sigma$ se cumplen*

i) $G(M,P) > 0$ *en* T,

ii) $\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}\rfloor_\Sigma \leq 0$.

Demostración: *i)* La función de Green es positiva en todos los puntos de T. En efecto, G se anula en la frontera Σ de la región, y es positiva sobre la superficie de una esfera suficientemente pequeña con centro en M.

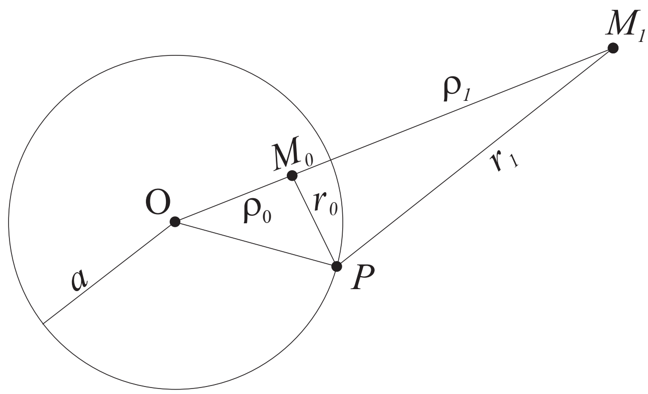


Figura 5.4: Transformación de los radio-vectores inversos respecto de la esfera de radio a.

Luego, por el principio del valor máximo, se deduce que G es positiva en toda la región.

ii) La propiedad

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}\rfloor_{\Sigma} \leq 0, \tag{5.78}$$

surge en forma inmediata dado que G es positiva en T y nula sobre su frontera Σ.

5.7 Primer problema de contorno para la esfera. Integral de Poisson

Por medio de la función de Green hallaremos la función $u(r, \theta, \phi)$ armónica en la esfera de radio a y tal que $u\rfloor_{\rho=a} = f(\phi, \theta)$. Para determinar la función de Green asociada a la esfera utilizaremos la transformación de los radio-vectores inversos, $\rho_0 = \overline{OM_0}$ y $\rho_1 = \overline{OM_1}$, que verifican $\rho_0\rho_1 = a^2$ (ver figura 5.4).
Si $P \in \Sigma_a$, los triángulos OPM_0 y OPM_1 son semejantes pues tienen el ángulo en O en común y los lados adyacentes proporcionales, por lo tanto es

$$\frac{\rho_0}{a} = \frac{a}{\rho_1} = \frac{r_0}{r_1}, \tag{5.79}$$

donde $r_0 = \overline{PM_0}$ y $r_1 = \overline{PM_1}$.
Entonces es $r_0 = \rho_0 r_1/a, \forall P \in \Sigma_a$, y la función armónica $v(M) = -a/(\rho_0 R_{M_1 M})$ toma sobre la esfera el mismo valor que la función $-1/R_{M_0 M}$. Resulta así la función de Green para la esfera,

$$G(M_0, M) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{R_{M_0 M}} - \frac{a}{\rho_0}\frac{1}{R_{M_1 M}}\right). \tag{5.80}$$

Según vimos, la solución al 1° problema de contorno es

$$u(M_0) = -\int_{\Sigma_a} f(P) \frac{\partial G(M_{0,P})}{\partial \mathbf{n}}\, dS_P. \tag{5.81}$$

Debemos entonces obtener $\partial G/\partial \mathbf{n}$ y evaluarla sobre la superficie Σ_a; es

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{r_0}\right) - \frac{a}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{r_1}\right)\right], \tag{5.82}$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{r_0}\right) = \frac{\partial}{\partial r_0}\left(\frac{1}{r_0}\right)\frac{\partial r_0}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{1}{r_0^2}\cos(\widehat{\mathbf{n}, r_0}),$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{r_1}\right) = -\frac{1}{r_1^2}\cos(\widehat{\mathbf{n}, r_1}). \tag{5.83}$$

Además,

$$\cos(\widehat{\mathbf{n}, r_0})\rfloor_{\Sigma_a} = \frac{a^2 + r_0^2 - \rho_0^2}{2ar_0},$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{n}, r_1})\rfloor_{\Sigma_a} = \frac{a^2 + r_1^2 - \rho_1^2}{2ar_1}, \tag{5.84}$$

y de $r_1 = ar_0/\rho_0$ y de $\rho_1 = a^2/\rho_0$ se obtiene

$$\cos(\widehat{\mathbf{n}, r_1})\rfloor_{\Sigma_a} = \frac{a^2 + a^2 r_0^2/\rho_0^2 - a^4/\rho_0^2}{2a^2 r_0/\rho_0} = \frac{\rho_0^2 + r_0^2 - a^2}{2r_0\rho_0}. \tag{5.85}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}\rfloor_{\Sigma_a} = -\frac{(a^2 - \rho_0^2)}{4\pi a r_0^3}, \tag{5.86}$$

y

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a}\int_{\Sigma_a} f(P)\,\frac{(a^2 - \rho_0^2)}{r_0^3} dS_P. \tag{5.87}$$

Si γ es el ángulo formado por $\overline{OP}$ y $\overline{OM_0}$ con $P(a, \alpha, \beta)$ y $M_0(\rho, \phi, \theta)$, es $\cos\gamma = \cos\beta\cos\theta + \sin\beta\sin\theta\cos(\alpha - \phi)$, entonces, la solución del problema interior para la esfera de radio a está representada por la *integral de Poisson*:

$$u(\rho, \phi, \theta) = \frac{a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\alpha, \beta)\,\frac{(a^2 - \rho^2)\sin\beta}{(a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos\gamma)^{3/2}}\, d\beta d\alpha. \tag{5.88}$$

La solución al problema exterior se obtiene en forma análoga y viene dada por la *integral de Poisson* correspondiente,

$$u(\rho, \phi, \theta) = \frac{a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\alpha, \beta)\,\frac{(\rho^2 - a^2)\sin\beta}{(a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos\gamma)^{3/2}}\, d\beta d\alpha. \tag{5.89}$$

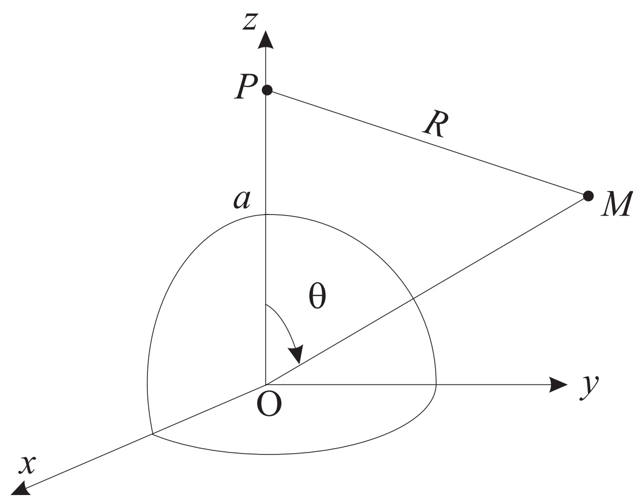


Figura 5.5: Una carga electrostática puntual ubicada en P y la esfera conductora de radio a.

Como aplicación, resolveremos el problema que consiste en hallar el campo electrostático de una carga puntual e situada en el punto P, en presencia de una esfera conductora ideal de radio a, como muestra la figura 5.5.
Para ello consideramos el origen del sistema de coordenadas esféricas en el centro de la esfera y hacemos pasar el eje polar $(\theta = 0)$ por el punto P, con $\overline{OP} = r_0 > a$.
El campo electrostático viene dado por $E = -\nabla u$ y el potencial $u = u(M)$, con $M = M(r, \phi, \theta)$, satisface la ecuación de Laplace en todos los puntos fuera de la esfera, excepto en $M = P$ donde presenta una singularidad del tipo $e/R_{MP} = u_0$, siendo u_0 el potencial de la carga e en el espacio en ausencia de la esfera. En la superficie de la esfera es $u\rfloor_{r=a} = 0$. Luego, la solución del problema será de la forma:

$$u(M) = \frac{e}{R} + v(M), \tag{5.90}$$

con $R = R_{MP} = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos\theta}$, y donde v es la solución al problema exterior de Dirichlet que sigue:

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0, \quad r > a \\ v\rfloor_{r=a} &= -\frac{e}{R}\rfloor_{r=a}. \end{aligned} \tag{5.91}$$

La función $1/R$ admite el desarrollo en serie de polinomios de Legendre (ver

apéndice **E**),

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta), \qquad r < r_0. \tag{5.92}$$

En tanto, para la resolución del problema exterior de Dirichlet proponemos

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta,\phi), \tag{5.93}$$

siendo $Y_n(\theta,\phi)$ una función esférica (remitimos nuevamente al apéndice **E**) que en este caso, por simetría, será independiente de ϕ. Entonces, de (5.92) y (5.93) sigue que

$$Y_n(\theta) = -ea^n r_0^{-(n+1)} P_n(\cos\theta), \tag{5.94}$$

y el potencial $u = u(r,\theta)$ viene dado por

$$u(r,\theta) = \frac{e}{R} - e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(rr_0)^{n+1}} P_n(\cos\theta). \tag{5.95}$$

5.8 Problema de contorno para un semiespacio

Resolveremos la ecuación de Laplace en el semiespacio $z > 0$, tal que $u\rfloor_{z=0} = f(x,y)$, con f regular en el infinito. La solución, dada por

$$u(M_0) = -\int_{\Sigma} u(P)\, \frac{\partial G(M_0,P)}{\partial \mathbf{n}}\, dS_P, \tag{5.96}$$

con $M_0(x_0,y_0,z_0)$ y $P(x,y,z)$, es válida para regiones no acotadas sólo en el caso de funciones regulares en el infinito (definidas en 5.4).
Hallaremos la función de Green asociada a este problema

$$G(M_0,P) = \frac{1}{4\pi R_{M_0P}} + v(M_0,P), \tag{5.97}$$

de modo que $G\rfloor_{z=0} = 0$. Sea $M_1(x_0,y_0,-z_0)$ el punto simétrico de M_0 respecto del plano $z = 0$, si se define

$$G(M_0,P) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{R_{M_0P}} - \frac{1}{R_{M_1P}}\right), \tag{5.98}$$

entonces se verifica $G\rfloor_{z=0} = 0$.
Dado que $\partial G/\partial \mathbf{n}\rfloor_{z=0} = -\partial G/\partial z\rfloor_{z=0}$, y utilizando las igualdades

$$\begin{aligned} R^2_{M_0P} &= (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2, \\ R^2_{M_1P} &= (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial R_{M_0P}}{\partial z} &= \frac{z - z_0}{R_{M_0P}}, \\
\frac{\partial R_{M_1P}}{\partial z} &= \frac{z_0 + z}{R_{M_1P}},
\end{aligned}
\tag{5.99}
$$

obtenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}\rfloor_{z=0} &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{z - z_0}{R^3_{M_0P}} - \frac{z + z_0}{R^3_{M_1P}}\right)\rfloor_{z=0} \\
&= -\frac{z_0}{2\pi[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2]^{3/2}}.
\end{aligned}
\tag{5.100}
$$

Entonces la solución para cualquier punto M_0 del subespacio es

$$
u(x_0, y_0, z_0) = \frac{z_0}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, y)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2]^{3/2}}\, dxdy. \tag{5.101}
$$

5.9 Ecuación general con coeficientes constantes

Toda ecuación de tipo elíptico con coeficientes constantes se reduce a la forma

$$
\Delta u + cu = F, \tag{5.102}
$$

y las propiedades de su solución dependen del signo de c.
En particular, cuando es $c > 0$ suele escribirse

$$
\Delta u + k^2 u = F, \tag{5.103}
$$

y se la conoce como *ecuación de Helmholtz* o *ecuación ondulatoria*. Esta ecuación se presenta en problemas relacionados con oscilaciones permanentes, propagación de ondas, problemas estacionarios, etc. Como se verá, el tratamiento de esta ecuación es semejante al de la ecuación de Laplace.

Cuando es $c < 0$, la ecuación (5.102) verifica los teoremas que se demuestran a continuación.

Teorema del valor máximo para problemas interiores. *Sea T una región abierta y acotada. La solución de $\Delta u - k^2 u = 0$, continua y con derivadas primeras y segundas continuas en T, toma su valor máximo positivo y mínimo negativo en la frontera de T.*
Demostración: Supongamos que la solución u toma su valor máximo positivo en $M_0 \in T$, entonces $u_{xx}(M_0)$, $u_{yy}(M_0)$, $u_{zz}(M_0) \leq 0$ y, en consecuencia, es $\Delta u(M_0) \leq 0$, pero $k^2 u(M_0) > 0$. Pero en ese caso no se verificaría la ecuación en M_0; esto es absurdo por lo tanto M_0 debe estar en la frontera de T.

El mínimo negativo de u es el máximo positivo de $-u$, de aquí que la misma demostración es válida para el mínimo negativo de u.

El 1° *problema interior* de contorno para la ecuación $\Delta u - k^2 u = 0$ en la región T de frontera Σ, consiste en hallar una función u, continua en $T + \Sigma$, que verifique la ecuación y tal que $u\rfloor_\Sigma = f$.

Teorema de unicidad para el 1° problema interior de contorno. *Si el 1° problema interior de contorno para la ecuación $\Delta u - k^2 u = 0$ tiene solución, esta solución es única.*
Demostración: Sean u_1 y u_2 soluciones, la función $u = u_1 - u_2$ es solución de la ecuación homogénea y $u\rfloor_\Sigma = 0$. El valor máximo de u no puede ser positivo pues debería estar en la frontera, y el valor mínimo no puede ser negativo por la misma razón. Por lo tanto es $u \equiv 0$ y la solución es única.

Las soluciones con simetría esférica de la ecuación $\Delta u + k^2 u = 0$ son $e^{\pm ikr}/r$, y las de $\Delta u - k^2 u = 0$ son $e^{\pm kr}/r$, en ambos casos con $r \neq 0$.
Esto resulta de considerar que para $u = u(r)$, el laplaciano se reduce a

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = \frac{1}{r}\frac{d^2(ru)}{dr^2},$$

y tomando $w = ru$, la ecuación $\Delta u + k^2 u = 0$ se escribe $d^2w/dr^2 + k^2 w = 0$, que tiene como solución general a $w = Ae^{ikr} + Be^{-ikr}$.
A las soluciones particulares de la ecuación de Helmholtz homogénea, $e^{\pm ikr}/r$, se las llama *soluciones fundamentales*.
En forma análoga, a partir de la solución general de $d^2w/dr^2 - k^2 w = 0$ se obtienen las *soluciones fundamentales* $e^{\pm kr}/r$ de $\Delta u - k^2 u = 0$.

Utilizando las soluciones fundamentales y definiendo la Función de Green, se puede obtener una solución de la ecuación (5.102) en forma de integral. Para esto se define el operador lineal $L(u) = \Delta u + cu$, y teniendo en cuenta la segunda fórmula de Green,

$$\int_T (u\Delta v - v\Delta u)\, dV = \int_\Sigma (uv_{\mathbf{n}} - vu_{\mathbf{n}})\, dS, \tag{5.104}$$

se obtiene que

$$\int_T (uL(v) - vL(u))\, dV = \int_\Sigma (uv_{\mathbf{n}} - vu_{\mathbf{n}}) dS. \tag{5.105}$$

Siguiendo un procedimiento análogo al utilizado para la fórmula fundamental de Green asociada a la ecuación de Laplace, se consideran, para $c = -k^2$ y $c = k^2$, las funciones $v = e^{-kR}/R$ y $v = e^{-ikR}/R$, respectivamente, con $R = R_{M_0M}$, y resultan las fórmulas fundamentales correspondientes.
Sabiendo que $L(u) = F$, y tomando $v = e^{-kR}/R$, se obtiene

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left[u\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{e^{-kR}}{R}\right) - \frac{e^{-kR}}{R}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right] dS - \frac{1}{4\pi}\int_T \frac{e^{-kR}}{R} F\, dV, \tag{5.106}$$

que es la *fórmula fundamental* asociada a $\Delta u - k^2 u = F$ para $M_0 \in T$.
Tomando $v = e^{-ikR}/R$ resulta

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left[u\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{e^{-ikR}}{R}\right) - \frac{e^{-ikR}}{R}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right] dS - \frac{1}{4\pi}\int_T \frac{e^{-ikR}}{R} F\, dV, \tag{5.107}$$

fórmula fundamental para la ecuación $\Delta u + k^2 u = F$ siendo M_0 un punto interior a T.

La *función de Green* asociada a la ecuación $\Delta u - k^2 u = F$ en la región T de frontera Σ, y para el 1° problema de contorno, es la función $G(M_0, M)$ definida por

i) $G(M_0, M) = e^{-kR}/4\pi R + v(M)$,

ii) $L(G) = 0$ para $M \neq M_0$, (lo que implica que $L(v) = 0$),

iii) $G\rfloor_\Sigma = 0$.

La *función de Green* correspondiente al 2° problema de contorno se define por

i) $G(M_0, M) = e^{-kR}/4\pi R + v(M)$,

ii) $L(G) = 0$ para $M \neq M_0$, (lo que implica que $L(v) = 0$),

iii) $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G\rfloor_\Sigma = 0$.

A continuación obtendremos la expresión integral de la solución al problema interior para $\Delta u - k^2 u = F$ en T con $u\rfloor_\Sigma = f$. Sumando a la fórmula fundamental (5.106), la fórmula (5.105) con $L(v) = 0$, resulta

$$\begin{aligned} u(M_0) = & - \int_\Sigma \left[u\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{e^{-kR}}{4\pi R} + v\right) - \left(\frac{e^{-kR}}{4\pi R} + v\right)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right] dS \\ & - \int_T \left(\frac{e^{-kR}}{4\pi R} + v\right) F\, dV, \end{aligned} \tag{5.108}$$

que en términos de $G(M_0, M)$ es

$$u(M_0) = -\int_\Sigma u(M)\,\frac{\partial G(M_0, M)}{\partial \mathbf{n}}\, dS - \int_T F(M)\, G(M_0, M)\, dV. \tag{5.109}$$

Entonces, la solución al problema planteado puede escribirse en la forma:

$$u(M_0) = -\int_\Sigma f(M)\frac{\partial G(M_0, M)}{\partial \mathbf{n}}\; dS - \int_T F(M) G(M_0, M)\; dV. \tag{5.110}$$

La *función de Green* asociada a la ecuación $\Delta u + k^2 u = F$ en la región T de frontera Σ, para el 1° problema de contorno, es la función $G(M_0, M)$ definida

por

i) $G(M_0, M) = e^{-ikR}/4\pi R + v(M_0.M)$,

ii) $L(G) = 0$, para $M \neq M_0$,

iii) $G\rfloor_\Sigma = 0$.

Con esta función de Green se resuelve el problema interior para la ecuación $\Delta u + k^2 u = F$ en T con $u\rfloor_\Sigma = f$, cuya solución es formalmente igual a la expresión (5.110).

Las fórmulas previas se aplican a regiones no acotadas, para la ecuación $\Delta u - k^2 u = 0$. Así por ejemplo, para problemas en el semiespacio $z > 0$, la función de Green se puede obtener utilizando un método análogo al de las imágenes electrostáticas, y resulta de la forma

$$G(M_0, M) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{-kR_{M_0M}}}{R_{M_0M}} - \frac{e^{-kR_{M_1M}}}{R_{M_1M}}\right), \quad (5.111)$$

con $M_0(x_0, y_0, z_0)$ y $M_1(x_0, y_0, -z_0)$.
Como se observa, se construyó G como función impar de z, de modo que se verifique $G\rfloor_{z=0} = 0$.

Para concluir esta sección, hallaremos la forma del operador O tal que

$$u(x, y, z) = exp(ikzO)(f(x, y)), \quad (5.112)$$

sea solución de la ecuación de Helmholtz $\Delta u + k^2 u = 0$.
Se define el operador $exp(ikzO)$ por la expresión

$$exp(ikzO)(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ikz)^n}{n!} O^n(f). \quad (5.113)$$

Si Δ_2 es el laplaciano en dos dimensiones, entonces

$$\begin{aligned} \Delta u &= \Delta_2 u - k^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(ikz)^{n-2}}{(n-2)!} O^n(f) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ikz)^n}{n!} \left[\Delta_2 - k^2 O^2\right] O^n(f) \\ &= -k^2 u = -k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ikz)^n}{n!} O^n(f). \end{aligned} \quad (5.114)$$

Por lo tanto,

$$\Delta_2 - k^2 O^2 = -k^2, \quad (5.115)$$

o bien

$$O = (1 + k^{-2}\Delta_2)^{1/2}. \quad (5.116)$$

Nota: En óptica suele utilizarse la aproximación paraxial del operador O,

$$O = 1 + \frac{\Delta_2}{2k^2}. \tag{5.117}$$

(Se supone k grande y se toman los dos primeros términos del desarrollo en serie de potencias de $\sqrt{1 + k^{-2}\Delta_2}$).
En este caso, una solución de la ecuación de Helmholtz es

$$u(x, y, z) = \exp(ikz) \exp\left(\frac{iz\Delta_2}{2k}\right)(f(x, y)). \tag{5.118}$$

5.10 Problemas propuestos

1- Clasificar las siguientes ecuaciones:

a)

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} + 3u_x = 0,$$

b)

$$u_{xy} - u_{xz} + 3xu_x - 2yu_z + x = 0.$$

2- Sea $u(M)$ una función armónica. Decir cuáles de las siguientes funciones son armónicas:

a) $u(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, con $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
b) $u(CM)$, con $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, siendo C una matriz constante ortogonal;
c) $v = u_x u_y$ si $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$;
d) $v = u_x u_y$ si $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

3- Hallar los valores máximo y mínimo de la función armónica $u = xy$ en la región $D : x^2 + y^2 \leq 1$. Hallar $u_{\mathbf{n}}$ en los puntos extremos de u siendo $\mathbf{n}$ la normal exterior a la frontera de D.

4- Resolver si es posible, $\Delta u = A$ dentro del anillo $a < \rho < b$, si $u_{\mathbf{n}}\rfloor_{\rho=a} = B$ y $u_{\mathbf{n}}\rfloor_{\rho=b} = C$.

5- Hallar la solución de $\Delta u = Ar + B$ dentro de la esfera $r < a$, si $u\rfloor_{r=a} = 0$.

6- Determinar la distribución estacionaria de temperatura dentro de una capa esférica $a < r < b$, si la superficie $r = a$ tiene temperatura constante u_1 y $r = b$ temperatura constante u_2 (simetría esférica).

7- Para el círculo, resolver el 1° problema interior de contorno para la ecuación de Laplace en $u(\rho, \varphi)$ si
a) $u(a, \varphi) = A$,

b) $u(a, \varphi) = A\cos\varphi$,
c) $u(a, \varphi) = A + Ba\sin\varphi$,
d) $u(a, \varphi) = A(sin\varphi)^2 + B(\cos\varphi)^2$,
e) $u(a, \varphi) = Aa^2\sin(2\varphi)/2$.

8- Mostrar que las partes real e imaginaria de una función analítica son funciones armónicas.
Sugerencia: usar las condiciones de Cauchy-Riemann

9- Obtener la fórmula fundamental de Green en el plano.
Sugerencia: en la segunda fórmula de Green en $\mathbb{R}^2$ tomar $v = \ln(1/R_{M_0P})$, donde R_{M_0P} es la distancia de $P(x, y)$ a un punto fijo $M_0(x_0.y_0)$, y proceder en forma análoga al caso tridimensional.

10- Para el círculo de radio a, resolver el 1° problema exterior de contorno para la ecuación de Laplace, en los siguientes casos
a) $u(a, \varphi) = A\cos\varphi$,
b) $u(a, \varphi) = A + Ba\sin\varphi$,
c) $u(a, \varphi) = A(\sin\varphi)^2 + B(\cos\varphi)^2$,
d) $u(a, \varphi) = A\sin(2\varphi)$.

11- Resolver el problema interior de Dirichlet: $\Delta u = 0$, con $x, y \in D$, siendo $D : x^2 + y^2 + 2x < 0$, si sobre la frontera de D es $u = 4x^3 + 6x - 1$.

12- Hallar la función armónica u, dentro del anillo $a < \rho < b$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $u(a, \varphi) = 0$ y $u(b, \varphi) = \cos\varphi$.
Sugerencia: utilizar separación de variables e incluir la solución para $n = 0$.

13- Dada una lámina en forma de sector circular $\rho < a$, $0 \leq \varphi \leq \alpha$ tal que

$$u(\rho, \varphi) = \begin{cases} u_1 & \rho = a,\, 0 < \varphi < \frac{\alpha}{2} \\ u_2 & \rho = a,\, \frac{\alpha}{2} < \varphi < \alpha \\ 0 & \varphi = 0,\, \varphi = \alpha \end{cases}$$

hallar la temperatura estacionaria en la lámina.
Sugerencia: utilizar separación de variables.

14- Hallar la solución del 1° problema de contorno para la ecuación de Laplace dentro del rectángulo.
Sugerencia: utilizar separación de variables y considerar $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$, donde u_i es la solución del problema con condición no nula sólo en el lado i-ésimo donde $u_i = f_i$.

15- Hallar la función u armónica en el semicírculo de radio a, $y > 0$, tal que $u = f(x, y)$ en $\rho = a$, $y > 0$; $u_y(x, 0) = 0$ con $-a < x < a$.

Sugerencia: utilizar la fórmula de Poisson.

16- Escribir la solución del 2° problema de contorno para el círculo de radio a, $\Delta u = 0$ con $u_{\mathbf{n}}\rfloor_{\rho=a} = f(\varphi)$.
a) interior,
b) exterior.

17- Resolver, si es posible, el 2° problema de contorno para el círculo de radio a y centro en el origen, $\Delta u = 0$ con $u_{\mathbf{n}}\rfloor_{\rho=a} = f(\varphi)$, en los siguientes casos:
a) $u(a,\varphi) = A$
b) $u(a,\varphi) = A\cos(2\varphi)$

18- Probar que el problema interior de Neumann para el círculo con $u_{\mathbf{n}} = f$ sobre la frontera Σ, tiene como solución

$$u(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int_{\Sigma} \ln[\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}] f(\xi,\eta)\, ds + cte.$$

Sugerencia: utilizar un razonamiento análogo al que condujo a la integral de Poisson.

19- Demostrar que para el 1° problema interior de contorno en $T + \Sigma$ y para la función de Green para la ecuación de Laplace, se verifica que
a) $G > 0$ en T,
b) $G_{\mathbf{n}}\rfloor_{\Sigma} \leq 0$.

20- Para el círculo, hallar la función de Green y resolver por medio de ella, el 1° problema interior de contorno.

21- Resolver el 1° problema interior de contorno para el semiespacio superior por medio de la función de Green.

22- Dada una esfera de radio a, resolver el problema de Dirichlet:

$$\Delta u = 0, \quad u\rfloor_{r=a} = f(\theta,\varphi)$$

a) interior,
b) exterior.
Sugerencia: utilizar separación de variables. La solución se expresa en términos de las funciones esféricas $Y_n(\theta,\varphi)$ (descriptas en el apéndice E).

23- Resolver el 1° problema de contorno para el semiplano superior con

$$u(x,0) = \frac{x}{x^2+1}.$$

24- Probar que las funciones

$$u_\nu(r,\theta) = I_\nu(\mu r)\,\cos(\nu\theta)$$

$$v_\nu(r,\theta) = I_\nu(\mu r)\,\sin(\nu\theta)$$

con I_ν funciones de Bessel modificadas de primera clase (apéndice **E**), verifican la ecuación:

$$\Delta u - \mu^2 u = 0.$$

25- Probar que las funciones

$$u_\nu(r,\theta) = K_\nu(\mu r)\,\cos(\nu\theta)$$

$$v_\nu(r,\theta) = K_\nu(\mu r)\,\sin(\nu\theta)$$

con K_ν funciones de Bessel modificadas de tercera clase (apéndice **E**), verifican la ecuación:

$$\Delta u - \mu^2 u = 0.$$

26- Hallar la distribución estacionaria de la concentración de un gas inestable dentro de un cilindro infinito de sección circular si se mantiene la concentración constante en la superficie del cilindro. Este problema consiste en hallar la solución acotada de la ecuación bidimensional

$$\Delta u - \mu^2 u = 0, \quad r \leq a; \quad u_{r=a} = u_0.$$

27- Hallar la distribución estacionaria de la concentración de un gas inestable fuera de un cilindro infinito de sección circular si se mantiene la concentración constante en la superficie del cilindro. Este problema consiste en hallar la solución acotada de la ecuación bidimensional

$$\Delta u - \mu^2 u = 0, \quad r \geq a; \quad u_{r=a} = u_0.$$

Soluciones a los problemas propuestos

1-a Hiperbólica
1-b Hiperbólica

2-a,b,c Armónicas; **d** No es armónica.

3- Máximos en $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ donde $u = 1/2$ y $u_{\mathbf{n}} = 1$;

mínimos en $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ donde $u = -1/2$ y $u_{\mathbf{n}} = -1$

4- La solución existe siempre que $C = Ab/2 - a(B + Aa/2)/b$ y es

$$u(\rho) = \frac{A\rho^2}{4} + C_1 \ln \rho + C_2$$

con $C_1 = -a(B + Aa/2) = b(c - Ab/2)$

5-

$$u(r) = A(r^3 - a^3)/12 + B(r^2 - a^2)/6$$

6-

$$u(r) = \frac{ab(u_2 - u_1)}{(a+b)r} + \frac{au_1 - bu_2}{(a-b)}$$

7-a

$$u(\rho, \varphi) = A$$

7-b

$$u(\rho, \varphi) = A\rho \cos\varphi / a$$

7-c

$$u(\rho, \varphi) = A + B\rho \sin\varphi$$

7-d

$$u(\rho, \varphi) = \frac{(A+B)}{2} + \frac{(B-A)}{2a^2}\rho^2 \cos(2\varphi)$$

7-e

$$u(a, \varphi) = A\rho^2 \sin(2\varphi)/2$$

10-a

$$u(\rho, \varphi) = Aa \cos\varphi / \rho$$

10-b

$$u(\rho, \varphi) = A + Ba \sin\varphi / \rho$$

10-c

$$u(\rho, \varphi) = \frac{(A+B)}{2} + \frac{(B-A)}{2\rho^2}a^2 \cos(2\varphi)$$

10-d

$$u(\rho, \varphi) = Aa^2 \sin(2\varphi)/\rho^2$$

11-

$$u(x, y) = x^3 - 3x^2 + 3y^2 - 3xy^2 + 12x - 1$$

12-

$$u(\rho, \varphi) = \frac{b}{b^2 - a^2}(\rho - a^2/\rho)\cos\varphi$$

13-

$$u(\rho, \varphi) = \frac{u_1 + u_2}{\pi} arctg\left[\frac{2(\rho a)^{\pi/\alpha}\sin(\pi\varphi/\alpha)}{a^{2\pi/\alpha} - \rho^{2\pi/\alpha}}\right] +$$

$$+\frac{u_1-u_2}{\pi}arctg\left[\frac{2(\rho a)^{2\pi/\alpha}\sin(2\pi\varphi/\alpha)}{a^{4\pi/\alpha}-\rho^{4\pi/\alpha}}\right]$$

14-

$$u_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{ash(n\pi b/a)}\left(\int_0^a f_1(\xi)\sin(n\pi\xi/a)d\xi\right)sh\left[\frac{n\pi(b-y)}{a}\right]\sin(n\pi x/a)$$

$$u_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{bsh(n\pi a/b)}\left(\int_0^a f_2(\xi)\sin(n\pi\xi/b)d\xi\right)sh\left[\frac{n\pi x}{b}\right]\sin(n\pi y/b)$$

$$u_3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{ash(n\pi b/a)}\left(\int_0^a f_3(\xi)\sin(n\pi\xi/a)d\xi\right)sh\left[\frac{n\pi y}{a}\right]\sin(n\pi x/a)$$

$$u_4=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{bsh(n\pi a/b)}\left(\int_0^a f_4(\xi)\sin(n\pi\xi/b)d\xi\right)sh\left[\frac{n\pi(a-x)}{b}\right]\sin(n\pi y/b)$$

15-

$$u(\rho,\phi)=\frac{(a^2-\rho^2)}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(\alpha)d\alpha}{(a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\alpha+\varphi))}+$$
$$+\frac{(a^2-\rho^2)}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(\alpha)d\alpha}{(a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\alpha-\varphi))}$$

16-a

$$u(\rho,\phi)=A_0+\frac{a}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\cos n(\alpha-\varphi)d\alpha;\quad \rho<a$$

16-b

$$u(\rho,\phi)=A_0-\frac{a}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{\rho}\right)^n\cos n(\alpha-\varphi)d\alpha;\quad \rho>a$$

17-a No existe solución a menos que sea A=0; en ese caso la solución es $u=cte$.

17-b

$$u(\rho,\phi)=A_0+\frac{A\rho^2}{2a}\cos(2\varphi)$$

20-

$$G(P,M_0)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{1}{R_{PM_0}}\right)-\ln\left(\frac{a}{\rho_0R_{PM_1}}\right)\right]$$

con M_0 y M_1 conjugados: $\rho_0\rho_1 = a^2$,

$$u(\rho_0, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\frac{a^2 - \rho_0^2}{a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0\cos(\theta - \theta_0)}\, d\theta \quad \rho_0 < a$$

con $P(\rho, \theta)$ y $M_0(\rho_0, \theta_0)$.

21-

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\ \frac{z_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2]^{3/2}}\ dxdy$$

22-a

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n Y_n(\theta, \varphi), \quad r \leq a$$

$$Y(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{m}\left[A_{nm}\cos(m\varphi) + B_{nm}\sin(m\varphi)\right] P_n^{(m)}(\cos\theta)$$

22-b

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \varphi), \quad r \leq a$$

23-

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + (y + 1)^2}$$

26-

$$u(r, \theta) = \frac{u_0}{I_0(ka)} I_0(kr)$$

27-

$$u(r, \theta) = \frac{u_0}{K_0(ka)} K_0(kr)$$

Capítulo 6

Ecuaciones hiperbólicas en el espacio y en el plano

6.1 Problema de Cauchy en el espacio. Integral de Poisson

Estudiaremos la ecuación que representa los procesos oscilatorios en el espacio o ecuación de onda,

$$a^2 \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f, \tag{6.1}$$

donde u y f son funciones de $M(x, y, z)$ y del tiempo t, y Δ es el laplaciano en tres dimensiones.

La función u es *solución* de la ecuación (6.1) en una región A del espacio si satisface la ecuación en A, y es continua y tiene derivadas primeras y segundas continuas en A para $t > 0$.

El *problema de Cauchy* para la ecuación de onda en el espacio consiste en hallar u tal que verifique la ecuación

$$a^2 \Delta u = u_{tt} - f(M, t), \qquad M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \qquad t > 0, \tag{6.2}$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(M, 0) &= \phi(M), \\ u_t(M, 0) &= \psi(M). \end{aligned} \tag{6.3}$$

A continuación demostraremos algunos resultados auxiliares que conducirán a la representación integral de la solución al problema de Cauchy (6.2)-(6.3).

Lema 6.1 *Sea $v(r, t) = ru(r, t)$, entonces la función u con simetría esférica verifica $u_{tt} = a^2 \Delta u$ si y sólo si v satisface $v_{tt} = a^2 v_{rr}$.*

Demostración: Dado que $u(r,t)$ tiene simetría esférica y el laplaciano en coordenadas esféricas es

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) = \frac{1}{r}\, v_{rr}, \tag{6.4}$$

de $v_{tt} = ru_{tt}$ y de $u_{tt} = a^2\Delta u$, resulta $v_{tt} = a^2 v_{rr}$, y recíprocamente.

Proposición 6.1 *Las soluciones particulares de la ecuación homogénea* $u_{tt} = a^2\Delta u$ *que poseen simetría esférica respecto a un punto* M_0 *y son acotadas en* M_0 *tienen la forma:*

$$u(R,t) = \frac{1}{R}\left[g\left(t+\frac{R}{a}\right) - g\left(t-\frac{R}{a}\right)\right], \tag{6.5}$$

con $R = R_{M_0M}$ *y* g *continua y con derivadas primera y segunda continuas.*
Demostración: Las soluciones de $u_{tt} = a^2\Delta u$ con simetría esférica se obtienen de $v(R,t) = R\,u(R,t)$ (en virtud del lema 6.1) con $v(R,t)$ soluciones de $v_{tt} = a^2 v_{RR}$ y, como se ha visto en el capítulo **3**, esta ecuación tiene como solución general a la función

$$v(R,t) = f_1\left(t-\frac{R}{a}\right) + f_2\left(t+\frac{R}{a}\right). \tag{6.6}$$

Dado que u es acotada en M_0, es $v(0,t) = 0$ y resulta

$$0 = f_1(t) + f_2(t), \tag{6.7}$$

de modo que denotando $f_2(t) = -f_1(t) = g(t)$ obtenemos que

$$u(R,t) = \frac{1}{R}\left[g\left(t+\frac{R}{a}\right) - g\left(t-\frac{R}{a}\right)\right], \tag{6.8}$$

tal como se quería demostrar.

Corolario: *Con las hipótesis y notaciones de la proposición 6.1, es*

$$u(0,t) = \frac{2}{a}\, g'(t). \tag{6.9}$$

Demostración: Sólo basta observar que

$$g'(t) = \lim_{R\to 0}\left\{\frac{g\,(t+R/a) - g\,(t-R/a)}{2R/a}\right\} = \frac{a}{2}\, u(0,t). \tag{6.10}$$

A fin de hallar la solución en forma de integral del problema de Cauchy para la ecuación de onda homogénea se utiliza el *método de promediación* que se

describe a continuación y que conduce a la integral de Poisson.

Método de promediación

Sea u solución del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} a^2\Delta u &= u_{tt}, \quad t>0, \quad M\in\mathbb{R}^3, \\ u(M,0) &= \phi(M). \\ u_t(M,0) &= \psi(M). \end{aligned} \tag{6.11}$$

Introduciendo coordenadas esféricas con centro en un punto fijo M_0, definimos la función $\overline{u}(R,t)$ como

$$\begin{aligned} \overline{u}(R,t) &= \frac{1}{4\pi R^2}\int_{\Sigma_R^{M_0}} u(M,t)\, dS = \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_R^{M_0}} u(M,t)\, d\Omega, \end{aligned} \tag{6.12}$$

con $R^2 d\Omega = dS$ y $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$, que representa el valor medio de u sobre la superficie esférica de centro M_0 y radio R, y de (6.12) se deduce que

$$\overline{u}(0,t) = u(M_0,t). \tag{6.13}$$

Tal como veremos, la función $\overline{u}(R,t)$ verifica la ecuación $a^2\Delta\overline{u} = \overline{u}_{tt}$. En efecto, integrando $a^2\Delta u = u_{tt}$ en la esfera $K_R^{M_0}$ con centro en M_0 y radio R

$$a^2\int_{K_R^{M_0}} \Delta u\, dV = \int_{K_R^{M_0}} u_{tt}\, dV, \tag{6.14}$$

y, aplicando la primera fórmula de Green en dicho volumen:

$$\int_{K_R^{M_0}} v\Delta u\, dV = \int_{\Sigma_R^{M_0}} v u_{\mathbf{n}}\, dS - \int_{K_R^{M_0}} \nabla u\nabla v\, dV \tag{6.15}$$

y tomando $v=1$, obtenemos que el primer término de (6.14) se escribe

$$\begin{aligned} a^2\int_{K_R^{M_0}} \Delta u\, dV &= a^2\int_{\Sigma_R^{M_0}} u_R R^2 d\Omega = a^2R^2\frac{\partial}{\partial R}\left(\int_{\Sigma_R^{M_0}} u d\Omega\right) = \\ &= 4\pi R^2 a^2\frac{\partial\overline{u}}{\partial R}. \end{aligned} \tag{6.16}$$

En tanto, para el segundo término de (6.14), resulta

$$\int_{K_R^{M_0}} u_{tt}\, dV = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int_0^R \rho^2 \int_{\Sigma_\rho^{M_0}} u \, d\Omega d\rho\right) = 4\pi \int_0^R \overline{u}_{tt}\rho^2 d\rho, \tag{6.17}$$

y, de las ecuaciones (6.16) y (6.17), se obtiene

$$R^2 a^2 \frac{\partial \overline{u}}{\partial R} = \int_0^R \overline{u}_{tt}(\rho, t)\rho^2 d\rho, \tag{6.18}$$

que derivada respecto a R es

$$a^2 \frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial \overline{u}}{\partial R}\right) = R^2 \overline{u}_{tt}, \tag{6.19}$$

es decir,

$$a^2 \Delta \overline{u} = \overline{u}_{tt}. \tag{6.20}$$

La proposición *6.1* permite escribir la solución $\overline{u}$ en la forma

$$\overline{u}(R,t) = \frac{1}{R}\left[g\left(t + \frac{R}{a}\right) - g\left(t - \frac{R}{a}\right)\right]. \tag{6.21}$$

y derivando $R\,\overline{u}$ respecto de R y de t, se obtienen

$$\begin{aligned} (R\overline{u})_R &= \frac{1}{a}\left[g'\left(t + \frac{R}{a}\right) + g'\left(t - \frac{R}{a}\right)\right], \\ (R\overline{u})_t &= g'\left(t + \frac{R}{a}\right) - g'\left(t - \frac{R}{a}\right), \end{aligned} \tag{6.22}$$

y de aquí

$$\left[(R\overline{u})_R + \frac{1}{a}(R\overline{u})_t\right]_{t=0, R=at_0} = \frac{2}{a} g'(t_0). \tag{6.23}$$

Pero según el corolario de la proposición 6.1 y por (6.13) es

$$\overline{u}(0, t_0) = \frac{2}{a} g'(t_0) = u(M_0, t_0). \tag{6.24}$$

De estos dos últimos resultados y reemplazando $\overline{u}$ por su expresión (6.12) resulta

$$u(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{R}{a}\int_{\Sigma_R^{M_0}} u_t \, d\Omega + \frac{\partial}{\partial R}\int_{\Sigma_R^{M_0}} Ru \, d\Omega\right]_{t=0, R=at_0}. \tag{6.25}$$

Finalmente, considerando las condiciones iniciales y el valor de u en un punto genérico (M, t), se obtiene la *fórmula integral de Poisson*,

$$u(M,t) = \frac{1}{4\pi}\left\{t\int_{\Sigma_{at}^M} \psi(P)\, d\Omega_P + \frac{\partial}{\partial t}\, t\int_{\Sigma_{at}^M} \phi(P)\, d\Omega_P\right\}. \tag{6.26}$$

De la integral de Poisson se deduce la *unicidad de la solución* del problema (6.11) ya que si u_1 y u_2 son soluciones de dicho problema, $u = u_1 - u_2$ es solución del problema con condiciones iniciales nulas y de (6.26) resulta $u \equiv 0$, con lo cual es $u_1 = u_2$.

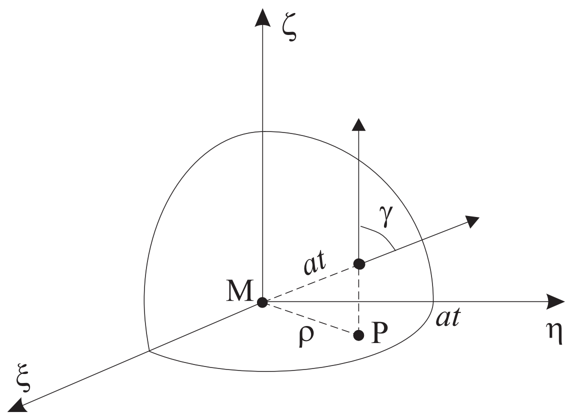


Figura 6.1: Esquema que ilustra la relación entre el diferencial de superficie sobre uno de los casquetes esféricos y su proyección sobre el plano (ξ, η).

6.2 Método del descenso

El resultado (6.26) para tres dimensiones puede utilizarse para encontrar la fórmula de Poisson en $\mathbb{R}^2$. En efecto, el problema de Cauchy en el plano consiste en resolver la ecuación

$$a^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_{tt}, \qquad t > 0, \tag{6.27}$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \phi(x, y), \\ u_t(x, y, 0) &= \psi(x, y). \end{aligned} \tag{6.28}$$

Consideremos la integral de Poisson (6.26) con ϕ y ψ independientes de z, lo que permite integrar sobre el círculo D^M_{at}, proyección de la superficie Σ^M_{at} sobre el plano (ξ, η). Tal como lo ilustra la figura 6.1 el diferencial de superficie esférica dS proyectado es

$$d\sigma \,=\, \cos\gamma dS \,=\, a^2 t^2 \, \cos\gamma \, d\Omega, \tag{6.29}$$

donde

$$\cos\gamma \,=\, \frac{\sqrt{(at)^2 - \rho^2}}{at} \,=\, \frac{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}{at}, \tag{6.30}$$

con $M(x, y)$ y $P(\xi, \eta)$.
Nótese que la integral sobre el círculo debe tomarse dos veces dadas las proyecciones de los casquetes superior e inferior, obteniéndose

$$u(M, t) \quad = \quad \frac{1}{2\pi a} \int\int_{D^M_{at}} \frac{\psi(\xi, \eta) \;\; d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} +$$

$$+ \quad \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int\int_{D_{at}^M} \frac{\phi(\xi,\eta)\ d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}, \qquad (6.31)$$

que es la *fórmula de Poisson en el plano*.

Ejemplo 1. Resolveremos la *ecuación del telegrafista*,

$$w_{xx}-k^2w \quad = \quad a^{-2}w_{tt},$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} w(x,0) &= f(x), \\ w_t(x,0) &= g(x), \end{aligned}$$

aplicando la fórmula (6.31).

La función

$$v(x,y,t)=w(x,t)\ \cos{(ky)},$$

satisface la ecuación de onda

$$v_{xx}+v_{yy}=w_{xx}\cos{(ky)}-k^2w\cos{(ky)}=a^{-2}w_{tt}\cos{(ky)}=a^{-2}v_{tt},$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} v(x,y,0) &= f(x)\ \cos{(ky)}, \\ v_t(x,y,0) &= g(x)\ \cos{(ky)}. \end{aligned}$$

Luego, en virtud de la fórmula (6.31) aplicada a v resulta

$$\begin{aligned} w(x,t)\ =\ v(x,0,t) \quad &= \quad \frac{1}{2\pi a}\int\int_{D_{at}^M}\frac{g(\xi)\cos{(k\eta)}\,d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-\eta^2}}+ \\ &+ \quad \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int\int_{D_{at}^M}\frac{f(\xi)\cos{(k\eta)}\,d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-\eta^2}}, \end{aligned}$$

con $M(x,0)$.
Consideremos la primera integral

$$\begin{aligned} &\int\int\ _{D_{at}^M}\ \frac{g(\xi)\cos{(k\eta)}\ d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-\eta^2}}= \\ &= \quad 2\int_{x-at}^{x+at}g(\xi)\,d\xi\int_0^{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2}}\ \frac{\cos{(k\eta)}\,d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-\eta^2}}, \end{aligned}$$

e introduciendo la sustitución

$$\eta = \sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2}\ \sin\theta,$$

es

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2}} \frac{\cos(k\eta)\, d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-\eta^2}} &= \int_0^{\pi/2} \cos(k\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2}\sin\theta)\, d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}\, J_0\left(k\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2}\right)\end{aligned}$$

(tal como se muestra en el apéndice **E**).
Finalmente la solución al problema se escribe

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)\ \ J_0\left(k\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2}\right)\ d\xi + \\ &+ \frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-at}^{x+at} f(\xi)\ \ J_0\left(k\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2}\right)\ d\xi. \end{aligned}$$

6.3 Método de la transformada de Fourier

Resolveremos el problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2\Delta u, \qquad M(x,y)\in\mathbb{R}^2, \\ u(M,0) &= \phi(x,y), \\ u_t(M,0) &= \psi(x,y). \end{aligned} \tag{6.32}$$

aplicando la transformada doble de Fourier. Denotando con $U = \mathcal{F}\{u\}$, este problema se transforma en

$$U_{tt} + a^2(\xi^2+\eta^2)\,U = 0, \tag{6.33}$$

(ver apéndice **B**) con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} U(\xi,\eta,0) &= \mathcal{F}\{u(x,y,0)\} = \mathcal{F}\{\phi\} = \Phi(\xi,\eta), \\ U_t(\xi,\eta,0) &= \mathcal{F}\{u_t(x,y,0)\} = \mathcal{F}\{\psi\} = \Psi(\xi,\eta). \end{aligned} \tag{6.34}$$

Será por lo tanto,

$$U(\xi,\eta,t) = \Phi(\xi,\eta)\ \cos\left(a\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,t\right) + \frac{\Psi(\xi,\eta)}{a\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\ \sin\left(a\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,t\right), \tag{6.35}$$

y antitransformando se obtiene

$$\mathcal{F}^{-1}\{U\} = \frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi,\eta)\,\cos\left(a\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,t\right)\; e^{i(\xi x+\eta y)}\;\, d\xi\, d\eta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(\xi,\eta)}{a\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\,\sin\left(a\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,t\right)\; e^{i(\xi x+\eta y)}\, d\xi\, d\eta, \qquad (6.36)$$

o bien,

$$u(x,y,t) = \int\int\int\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(u,v)}{4\pi^2}\cos\left(a\sqrt{\xi^2+\eta^2}t\right) e^{-i[\xi(u-x)+\eta(v-y)]}\, dudvd\xi d\eta +$$

$$+\int\int\int\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(u,v)}{4\pi^2 a\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\sin\left(a\sqrt{\xi^2+\eta^2}t\right) e^{-i[\xi(u-x)+\eta(v-y)]} dudvd\xi d\eta.$$

Introduciendo coordenadas polares

$$\begin{array}{rcll} \xi &=& r\cos\theta, & \quad u-x=\rho\cos\alpha, \\ \eta &=& r\sin\theta, & \quad v-y=\rho\sin\alpha, \end{array} \qquad (6.37)$$

la primera integral se escribe

$$\begin{aligned} u_1(x,y,t) \;\; &= \;\; \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \phi(x+\rho\cos\alpha, y+\rho\sin\alpha)\rho d\rho d\alpha \,\cdot \\ &\qquad \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-ir\rho\cos(\theta-\alpha)} d\theta\cos(art) r dr, \end{aligned} \qquad (6.38)$$

pero, como se muestra en el apéndice **E**, es

$$\int_0^{2\pi} e^{-ir\rho\cos(\theta-\alpha)}\, d\theta \;=\; 2\pi J_0(r\rho), \qquad (6.39)$$

entonces

$$\int_0^{\infty} 2\pi J_0(r\rho)\, r\cos(art)\, dr \;=\; \frac{2\pi}{a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\infty} J_0(r\rho)\,\sin(art)\, dr, \qquad (6.40)$$

de modo que se obtiene

$$u_1(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\,\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{at} \frac{\phi(x+\rho\cos\alpha, y+\rho\sin\alpha)}{\sqrt{(at)^2-\rho^2}}\,\rho d\rho d\alpha, \qquad (6.41)$$

donde se ha utilizado la siguiente identidad

$$\int_0^{\infty} J_0(\rho r)\sin(art) dr = \begin{cases} 0, & at < \rho \\ \frac{1}{\sqrt{(at)^2-\rho^2}}, & at > \rho, \end{cases} \qquad (6.42)$$

que se demuestra en el apéndice **E**.
En tanto, el segundo término de (6.36) es

$$u_2(x,y,t) = \frac{1}{4\pi^2 a}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\psi(x+\rho\cos\phi, y+\rho\sin\phi)\ \rho d\rho d\phi\ \cdot$$

$$\int_0^{\infty}\left(\int_0^{2\pi} e^{-ir\rho\cos(\theta-\phi)}d\theta\right)\sin(art)dr =$$

$$= \frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\psi(x+\rho\cos\alpha, y+\rho\sin\alpha)\ \rho d\rho d\alpha \cdot$$

$$\left(\int_0^{\infty} J_0(r\rho)\ \sin(art)dr\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\int_0^{at}\psi(x+\rho\cos\alpha, y+\rho\sin\alpha)\frac{\rho}{\sqrt{(at)^2-\rho^2}}\ d\rho d\alpha, \tag{6.43}$$

y la solución viene dada por

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\int_0^{at}\frac{\psi(x+\rho\cos\alpha, y+\rho\sin\alpha)}{\sqrt{(at)^2-\rho^2}}\ \rho\, d\rho d\alpha + \\ &+ \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{at}\frac{\phi(x+\rho\cos\alpha, y+\rho\sin\alpha)}{\sqrt{(at)^2-\rho^2}}\ \rho\, d\rho d\alpha; \end{aligned} \tag{6.44}$$

o bien, indicando con D_{at}^M al círculo con centro en M y radio at, es

$$\begin{aligned} u(M,t) &= \frac{1}{2\pi a}\int\int_{D_{at}^M}\frac{\psi(u,v)\ dudv}{\sqrt{(at)^2-(x-u)^2-(y-v)^2}} + \\ &+ \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int\int_{D_{at}^M}\frac{\phi(u,v)\ dudv}{\sqrt{(at)^2-(x-u)^2-(y-v)^2}}, \end{aligned} \tag{6.45}$$

fórmula que se obtuvo por el *método del descenso*.
Este ejemplo muestra que la transformada de Fourier es una herramienta útil para resolver algunos tipos de EDP.

6.4 Método de reflexión

Este método suele utilizarse cuando se tienen regiones limitadas por planos. Aquí consideraremos el problema en un subespacio, que consiste en resolver

la ecuación homogénea

$$a^2\Delta u = u_{tt}, \qquad z \geq 0, \tag{6.46}$$

con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(M,0) &= \phi(M), \\ u_t(M,0) &= \psi(M), \qquad M(x,y,z), \;\; z \geq 0, \end{aligned} \tag{6.47}$$

y condición de frontera nula

$$u\rfloor_{z=0} = 0, \tag{6.48}$$

para el 1° problema de contorno, o

$$u_z\rfloor_{z=0} = 0, \tag{6.49}$$

en el caso del 2° problema de contorno.
La solución se obtiene de la integral de Poisson en $\mathbb{R}^3$,

$$u(M_0,t) = \frac{1}{4\pi a}\left\{\int_{\Sigma_{at}^{M_0}} \frac{\Psi dS}{at} + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma_{at}^{M_0}} \frac{\Phi dS}{at},\right\} \tag{6.50}$$

donde para el 1° problema de contorno Φ y Ψ denotan a las prolongaciones impares respecto de $z = 0$ de ϕ y ψ dadas por (6.47). En efecto, en puntos $(x,y,0)$ el valor de las integrales sobre el casquete superior de Σ_{at}^M es igual y de signo opuesto al de las integrales sobre el casquete inferior y por tanto es $u(x,y,0,t) = 0$.
Para el 2° problema de contorno se toman Φ y Ψ como las prolongaciones pares respecto de $z = 0$ de las condiciones iniciales; entonces la integral de Poisson resuelve el problema (6.46)-(6.47) con $u_z\rfloor_{z=0} = 0$.

Si se desea hallar la solución de

$$\begin{aligned} a^2\Delta u &= u_{tt}, \qquad 0 \leq z \leq l, \quad t > 0, \\ u(M,0) &= \phi(M), \\ u_t(M,0) &= \psi(M), \qquad 0 \geq z \geq l, \\ u\rfloor_{z=0} &= u\rfloor_{z=l} = 0, \end{aligned} \tag{6.51}$$

se prolongan en forma impar las funciones ϕ y ψ respecto de $z = 0$ y de $z = l$, y la solución vendrá dada por la fórmula de Poisson. En este caso Φ y Ψ resultarán funciones periódicas de z con período $2l$.
En forma análoga se resuelve el problema anterior con las condiciones de frontera $u_z\rfloor_{z=0} = u_z\rfloor_{z=l} = 0$, prolongando las condiciones iniciales en forma par.

6.5 Fórmula de Kirchhoff

Para resolver la ecuación completa,

$$a^2\Delta u - u_{tt} = -f, \tag{6.52}$$

en el punto (M_0, t_0) se introduce, en lugar del tiempo t, el tiempo local t^* del punto M_0 dado por

$$t^* = t - \left(t_0 - \frac{R_{M_0M}}{a}\right). \tag{6.53}$$

Se emplean coordenadas esféricas (R, ϕ, θ) con centro en M_0 $(R = R_{M_0M})$, y se considera la función U definida por

$$u(R, \theta, \phi, t) = u\left(R, \theta, \phi, t^* + t_0 - \frac{R}{a}\right) = U(R, \theta, \phi, t^*). \tag{6.54}$$

Para

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{R^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}, \tag{6.55}$$

se tienen

$$\begin{aligned} u_R &= U_R + \frac{1}{a}U_{t^*}, \\ u_{RR} &= U_{RR} + \frac{2}{a}U_{Rt^*} + \frac{1}{a^2}U_{t^*t^*}, \end{aligned}$$

que reemplazadas en (6.52), con $F(R, \theta, \phi, t^*) = f(R, \theta, \phi, t)$, dan la ecuación

$$\begin{aligned} a^2\Delta U &= -F - 2aU_{Rt^*} - \frac{2a}{R}U_{t^*} \\ &= -F - \frac{2a}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RU_{t^*}). \end{aligned} \tag{6.56}$$

Si T es una región del espacio de frontera Σ y $M_0 \in T$, la fórmula fundamental de Green en el espacio (ecuación (5.27)) aplicada a U, con $t^* = 0$, arroja

$$4\pi U(M_0, 0) =$$

$$\left[\int_\Sigma \left(\frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} - U\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{R}\right)\right) dS + \int_T \frac{2}{aR^2}\frac{\partial}{\partial R}(RU_{t^*})\, dV + \int_T \frac{F}{a^2R}\, dV\right]_{t^*=0} \tag{6.57}$$

Notamos que la segunda de las integrales es impropia (apéndice **A**) de modo que, tomando esferas con centro M_0 y radio ϵ, si $\Sigma_\epsilon^{M_0} = \Sigma_\epsilon$ y $K_\epsilon^{M_0} = K_\epsilon$, se considera la integral

$$I_\epsilon = \int_{T-K_\epsilon} \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(RU_{t^*})dV = \int_{T-K_\epsilon} \frac{\partial}{\partial R}(RU_{t^*})\sin\theta\, dRd\theta d\phi, \tag{6.58}$$

e integrando con respecto a R se obtiene

$$I_\epsilon = \int_\Sigma \frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial t^*}\cos(\widehat{\mathbf{n}, R})\, dS + \int_{\Sigma_\epsilon} \frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial t^*}\, dS, \tag{6.59}$$

con $dS\cos(\widehat{\mathbf{n}, R}) = R^2\sin\theta d\theta d\phi$ y $\mathbf{n}$ la normal a Σ. Entonces es

$$\int_T \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(RU_{t^*})\, dV = \lim_{\epsilon\to 0} I_\epsilon = \int_\Sigma \frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial t^*}\frac{dR}{dn}\, dS, \tag{6.60}$$

pues

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Sigma_\epsilon}\frac{1}{R}U_{t^*}\,dS \;=\; \lim_{\epsilon\to 0}\overline{U}_{t^*}4\pi\epsilon \;=\; 0, \tag{6.61}$$

con U_{t^*} continua en M_0.
De aquí que (6.57) se transforma en

$$\begin{aligned} 4\pi U(M_0,0) &= \left[\int_\Sigma\left(\frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} - U\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{R}\right)\right)dS + \int_\Sigma \frac{2}{aR}U_{t^*}\frac{dR}{d\mathbf{n}}\,dS\right]_{t^*=0} + \\ &+ \left[\int_T \frac{F}{a^2R}\,dV\right]_{t^*=0}. \end{aligned} \tag{6.62}$$

y, teniendo presente las definiciones para U y t^*, resultan

$$\begin{aligned} U(M_0,0) &= u(M_0,t_0),\\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial t^*}\frac{dR}{d\mathbf{n}}. \end{aligned} \tag{6.63}$$

Finalmente, se obtiene para u la *fórmula de Kirchhoff*:

$$\begin{aligned} u(M_0,t_0) &= \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma\left\{\frac{1}{R}[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}] - [u]\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{1}{aR}[\frac{\partial u}{\partial t}]\frac{dR}{d\mathbf{n}}\right\}dS + \\ &+ \frac{1}{4\pi a^2}\int_T\frac{[f]}{R}\,dV, \end{aligned} \tag{6.64}$$

donde los corchetes indican que las funciones están evaluadas en $t = t_0 - R/a$, pues es $t^* = 0$.

6.6 Corolarios de la fórmula de Kirchhoff

A partir de (6.64) se desea obtener la solución del problema en el espacio

$$\begin{aligned} a^2\Delta u &= u_{tt},\\ u(M,0) &= \phi(M),\\ u_t(M,0) &= \psi(M), \end{aligned} \tag{6.65}$$

resuelto en la sección **6.1** por el método de promediación.
Tomando $\Sigma = \Sigma_{at_0}^{M_0}$ se calculan

$$\begin{aligned} [u]\rfloor_\Sigma &= u\left(M,t_0-R/a\right)\rfloor_\Sigma = u(M,0) = \phi(M),\\ [\frac{\partial u}{\partial t}]\rfloor_\Sigma &= \frac{\partial u}{\partial t}(M,0) = \psi(M), \end{aligned}$$

$$[\frac{\partial u}{\partial n}]\rfloor_\Sigma \quad = \quad \frac{\partial u}{\partial R}(M,0) = \frac{\partial \phi}{\partial R}(M), \tag{6.66}$$

de donde resulta

$$\left[\frac{1}{R}[\frac{\partial u}{\partial n}] - [u]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right]\rfloor_\Sigma = \frac{1}{R}\frac{\partial \phi}{\partial R} + \frac{\phi}{R^2} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R\phi). \tag{6.67}$$

Sustituyendo en (6.64) se tiene que

$$\begin{aligned} u(M_0,t_0) &= \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_{at_0}^{M_0}} \left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R\phi) + \frac{1}{aR}\psi\right)\, dS = \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial R}\int_{\Sigma_{at_0}^{M_0}} R\,\phi\, d\Omega + \frac{1}{a}\int_{\Sigma_{at_0}^{M_0}} R\,\psi\, d\Omega\right)\rfloor_{R=at_0}, \end{aligned} \tag{6.68}$$

y, suprimiendo los subíndices, es

$$u(M,t) \, = \, \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial t}t\int_{\Sigma_{at}^M}\phi\, d\Omega + t\int_{\Sigma_{at}^M}\psi\, d\Omega\right), \tag{6.69}$$

que coincide con (6.26).

Para el problema

$$\begin{aligned} a^2\Delta u &= u_{tt} - f, \\ u(M,0) &= u_t(M,0) \, = \, 0, \end{aligned} \tag{6.70}$$

la fórmula de Kirchhoff provee la solución

$$u(M,t) \, = \, \frac{1}{4\pi a^2}\int_{K_{at}^M}\frac{f(P,t-R/a)}{R}\, dV_P, \tag{6.71}$$

con $R = R_{MP}$. (Según convenga puede tomarse cualquier volumen T como recinto de integración.)

El problema de Cauchy en $\mathbb{R}^3$ con $t > 0$:

$$\begin{aligned} a^2\Delta u &= u_{tt} - f, \\ u(M,0) &= \phi(M), \\ u_t(M,0) &= \psi(M), \end{aligned} \tag{6.72}$$

tiene como solución a la función suma de las soluciones a (6.11) y (6.70),

$$u(M,t) \quad = \quad \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial t}\, t\int_{\Sigma_{at}^M}\phi(P)\, d\Omega_P \, + \, t\int_{\Sigma_{at}^M}\psi(P)\, d\Omega_P\right) +$$

$$+ \quad \frac{1}{4\pi a^2} \int_{K_{at}^M} \frac{f(P, t - R/a)}{R} \; dV_P. \qquad (6.73)$$

Si en (6.70) se considera el caso particular en que $f = f_0(M)\, e^{i\omega t}$, es decir, f es una función periódica del tiempo, de (6.71) se obtiene que

$$u(M,t) \;=\; \frac{e^{i\omega t}}{4\pi a^2} \int_{K_{at}^M} f_0(P)\, \frac{e^{-ikR}}{R}\, dV, \qquad \omega = ak, \qquad (6.74)$$

donde $R = R_{MP}$.
Consideremos ahora una función f_0 local, es decir $f_0 = 0$ fuera de una región T compacta. Si $M \notin T$, y d es la distancia de dicho punto a T, entonces para $t < d/a$ es

$$\int_{K_{at}^M} f_0(P)\, \frac{e^{-ikR}}{R}\, dV_P \;=\; 0. \qquad (6.75)$$

Si $D =$*máx*$_{P \in T}\, R_{MP}$, a partir de $t > D/a$ la integral que define a la amplitud v de las oscilaciones periódicas es constante y vale

$$v(M) \;=\; \frac{1}{4\pi a^2} \int_T f_0(P)\, \frac{e^{-ikR}}{R}\, dV_P. \qquad (6.76)$$

Entonces será

$$u(M,t) \;=\; v(M)\, e^{i\omega t}, \qquad t \geq D/a. \qquad (6.77)$$

que llevada a $a^2 \Delta u = u_{tt} - f$, con $f = f_0 e^{i\omega t}$, determina que la amplitud satisface

$$\Delta v + k^2 v \;=\; -\frac{f_0(M)}{a^2}, \qquad (6.78)$$

conocida como ecuación ondulatoria o *ecuación de Helmholtz*.
Para el caso de *oscilaciones permanentes*, con $f(M,t) = f_0(M) e^{i\omega t}$, la solución es $u(M,t) = v(M,t)\, e^{i\omega t}$ con v solución de (6.78). Calculando

$$\begin{aligned}
[u] &= u\,(M, t - R/a) \;=\; v(M)\, e^{i\omega(t - R/a)} [\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}] = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} e^{i\omega(t-R/a)}, \\
[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}] &= \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} e^{i\omega(t-R/a)}, \\
[\frac{\partial u}{\partial t}] &= i\omega v(M)\, e^{i\omega(t-R/a)}, \\
[f] &= f_0(M) e^{i\omega(t-R/a)}, \qquad (6.79)
\end{aligned}$$

y sustituyendo estos valores en la fórmula de Kirchhoff, se obtiene para la amplitud la expresión

$$v(M) \quad = \quad \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \left[\frac{e^{-ikR}}{R} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v\, e^{-ikR} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{ikv}{R} e^{-ikR} \frac{dR}{d\mathbf{n}} \right] \; dS +$$

$$+ \quad \frac{1}{4\pi a^2}\int_T \frac{f_0(M)e^{-ikR}}{R}\,dV, \tag{6.80}$$

o bien,

$$v(M) \;=\; \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left[\left(\frac{e^{-ikR}}{R}\right)\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{e^{-ikR}}{R}\right)\right] dS +$$

$$+ \quad \frac{1}{4\pi}\int_T f_0(M)\,\frac{e^{-ikR}}{a^2 R}\,dV, \tag{6.81}$$

que es la *fórmula integral para la ecuación de Helmholtz*.
Naturalmente, si $\omega = ak = 0$, se recupera la fórmula fundamental de Green para la ecuación de Poisson $\Delta v = -f_0(M)/a^2$.

En los ejemplos que siguen, al tratarse de ecuaciones homogéneas, resulta efectivo el método de separación de variables (tratado en el apéndice **C**). Como veremos, se utilizan en cada caso coordenadas adecuadas a la geometría del problema particular a resolver.

6.7 Problemas en regiones acotadas. Separación de variables

Membrana rectangular. Resolveremos el problema de las oscilaciones de una membrana rectangular homogénea y plana, fija en su borde y perturbada mediante una desviación y velocidad iniciales,

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2\Delta u, \\ u\rfloor_{t=0} &= \phi(x,y), \qquad u_t\rfloor_{t=0} = \psi(x,y), \\ u(0,y,t) &= u(b,y,t) = 0, \qquad 0 \le y \le c, \\ u(x,0,t) &= u(x,c,t) = 0, \qquad 0 \le x \le b. \end{aligned}$$

Para ello proponemos una solución de la forma

$$u(x,y,t) \;=\; v(x,y)T(t).$$

Así obtenemos para $T(t)$ la ecuación

$$T'' + a^2\lambda T = 0, \tag{6.82}$$

y para $v(x,y)$ el siguiente problema de contorno:

$$\begin{aligned} v_{xx} + v_{yy} + \lambda v &= 0, \\ v(0,y) &= v(b,y) = 0, \end{aligned}$$

$$v(x,0) \quad = \quad v(x,c)=0,$$

que también resolveremos por el método de separación de variables con

$$v(x,y)=X(x)Y(y).$$

Obtenemos entonces para X e Y los problemas unidimensionales

$$\begin{cases} X''+\nu X=0 \\ X(0)=X(b)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y''+\mu Y=0 \\ Y(0)=Y(c)=0, \end{cases}$$

donde las constantes de separación ν y μ se hallan ligadas por la ecuación

$$\nu+\mu=\lambda.$$

Las soluciones para X e Y son

$$\begin{aligned} X_n(x) &= \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right), \qquad Y_m(y)=\sin\left(\frac{m\pi y}{c}\right), \\ \nu_n &= \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \qquad \mu_m=\left(\frac{m\pi}{c}\right)^2, \end{aligned}$$

de modo que a los autovalores

$$\lambda_{n,m}=\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{c}\right)^2,$$

corresponden las funciones propias

$$v_{n,m}=A_{n,m}\,\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\,\sin\left(\frac{m\pi y}{c}\right),$$

donde $A_{n,m}$ es un factor constante.
Tomando

$$A_{n,m}=\frac{2}{\sqrt{bc}},$$

puede verificarse que las funciones $v_{n,m}$ forman un sistema normal. Además, el sistema de funciones $v_{n,m}$ es tal que cualquier función $F(x,y)$ con derivadas primeras y segundas continuas y que cumple las condiciones homogéneas de frontera puede ser desarrollada en serie absoluta y uniformemente convergente de las funciones $v_{n,m}$ (teoría de las series múltiples de Fourier).
Las soluciones particulares para u, que tienen la forma

$$u_{n,m}=v_{n,m}(x,y)\,\left[B_{n,m}\cos(\sqrt{\lambda_{n,m}}at)+C_{n,m}\sin(\sqrt{\lambda_{n,m}}at)\right],$$

son ondas estacionarias cuyo perfil se determina por las funciones $v_{n,m}$.
Los lugares geométricos de los puntos dentro del rectángulo en los cuales las funciones $v_{n,m}$ se anulan, se llaman líneas nodales.

Finalmente, la solución al problema planteado es

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[B_{n,m}\cos(\sqrt{\lambda_{n,m}}at) + C_{n,m}\sin(\sqrt{\lambda_{n,m}}at)\right]\, v_{n,m}(x,y),$$

donde

$$\begin{aligned} B_{n,m} &= \int_0^b\int_0^c \phi(x,y)\, v_{n,m}(x,y)\, dxdy, \\ C_{n,m} &= \frac{1}{\sqrt{a^2\lambda}}\int_0^b\int_0^c \psi(x,y)\, v_{n,m}(x,y)\, dxdy, \end{aligned}$$

con

$$v_{n,m} = \frac{2}{\sqrt{bc}}\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{c}\right). \tag{6.83}$$

Membrana circular. Resolveremos el problema de las oscilaciones de una membrana circular fija en su borde, sometida a una deformación y una distribución de velocidades dadas en el instante inicial $t = 0$.

La ecuación de las oscilaciones en coordenadas polares se escribe

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

y sean las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(r,\theta,0) &= f_1(r,\theta), \\ u_t(r,\theta,0) &= f_2(r,\theta), \end{aligned}$$

y la condición de frontera

$$u(r_0,\theta,t) = 0.$$

Proponiendo para su resolución la separación de variables,

$$u(r,\theta,t) = v(r,\theta)T(t),$$

se obtiene para $T(t)$ la ecuación

$$T'' + a^2\lambda T = 0, \qquad \lambda > 0.$$

y resulta

$$T(t) = C_1\cos(a\sqrt{\lambda}t) + C_2\sin(a\sqrt{\lambda}t).$$

Para $v(r,\theta)$ se tiene el problema

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+\lambda v &= 0, \qquad 0<r<r_0,\\
|v(0,\theta)| &< \infty,\\
v(r_0,\theta) &= 0,
\end{aligned}$$

y es $v(r,\theta)=v(r,\theta+2\pi)$.
Si se propone $v(r,\theta)=R(r)\,\Theta(\theta)$, se obtiene para Θ la ecuación

$$\begin{aligned}
\Theta''+\mu^2\Theta &= 0, \qquad \mu>0,\\
\Theta(\theta) &= \Theta(\theta+2\pi),\\
\Theta'(\theta) &= \Theta'(\theta+2\pi),
\end{aligned}$$

en tanto que para R se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\left(\lambda-\frac{\mu^2}{r^2}\right)R &= 0,\\
R(r_0) &= 0,\\
|R(0)| &< \infty.
\end{aligned}$$

Las soluciones periódicas no triviales para $\Theta(\theta)$ existen sólo para $\mu^2=n^2$ (con $n\in\mathbb{Z}$)

$$\Theta_n(\theta)=D_n\cos(n\theta)+E_n\sin(n\theta).$$

Para $R(r)$ se tiene la ecuación

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left(\lambda-\frac{n^2}{r^2}\right)R=0,$$

con las condiciones

$$R(r_0)=0, \qquad |R(0)|<\infty.$$

La condición de acotación para $r=0$ se halla relacionada con el hecho de que $r=0$ es un punto singular de la ecuación.
Introduciendo la nueva variable $x=\sqrt{\lambda}r$, y escribiendo

$$R(r)=R\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)=y(x),$$

se obtiene para $y(x)$ la ecuación de las funciones cilíndricas de n-ésimo orden (ver apéndice **E**):

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0$$

con las condiciones de frontera

$$\begin{array}{rcl} y(x_0) & = & 0, \qquad (x_0 = \sqrt{\lambda} r_0), \\ |y(0)| & < & \infty. \end{array}$$

La solución general de la ecuación de las funciones cilíndricas es

$$y(x) = d\, J_n(x) + e\, N_n(x),$$

donde $J_n(x)$ y $N_n(x)$ son las funciones de Bessel y de Neumann de n-ésimo orden respectivamente. La condición de acotación en $x = 0$ implica que $e = 0$, en tanto que por la primera condición es

$$J_n(\sqrt{\lambda} r_0) = 0.$$

Si $\mu_m^{(n)}$ es la raíz m-ésima de la ecuación $J_n(\mu) = 0$, entonces es

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} \right)^2 .$$

A este valor le corresponde la función

$$R_{n,m} = y\left(\sqrt{\lambda_{n,m}} r \right) = J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right), \tag{6.84}$$

y las dos funciones propias

$$\begin{array}{rcl} \overline{v}_{n,m} & = & J_n \left(\dfrac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right) \cos(n\theta), \\ \overline{\overline{v}}_{n,m} & = & J_n \left(\dfrac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right) \sin(n\theta), \end{array}$$

cuya combinación lineal provee

$$v_{n,m}(r, \theta) \;=\; J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right) \left[A_{n,m} \cos(n\theta) + B_{n,m} \sin(n\theta) \right].$$

Puede demostrarse que las funciones $v_{n,m}$ forman un sistema ortogonal. Además, cualquier función continua $F(r, \theta)$ con derivadas primeras que satisfaga las condiciones de frontera se puede desarrollar en la serie

$$F(r, \theta) \;=\; \sum_{n,m} \left[A_{n,m} \overline{v}_{n,m}(r, \theta) + B_{n,m} \overline{\overline{v}}_{n,m}(r, \theta) \right],$$

tomada sobre todos los valores propios $\lambda_{n,m}$ para el círculo, que converge en forma absoluta y uniforme.

Los coeficientes del dessarrollo se calculan según

$$A_{n,m} \quad = \quad \frac{2\int_0^{2\pi} F(r,\theta)\ J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)\ \cos(n\theta)\ \ r\,drd\theta}{\pi r_0^2\ \epsilon_n\ [J_n'(\mu_m^{(n)})]^2},$$

$$B_{n,m} \quad = \quad \frac{2\int_0^{2\pi} F(r,\theta)\ J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)\ \sin(n\theta)\ \ r\,drd\theta}{\pi r_0^2\ \epsilon_n\ [J_n'(\mu_m^{(n)})]^2},$$

donde

$$\epsilon_n = \begin{cases} 2, & si \quad n = 0, \\ 1, & si \quad n \neq 0. \end{cases}$$

Volviendo al problema original de las oscilaciones de una membrana con desviación y distribución de velocidades dadas, su solución se puede escribir en la forma

$$u(r,\theta,t) \quad = \quad \sum_{n,m}^{\infty} \overline{v}_{n,m}(r,\theta)\left[A_{n,m}\cos\left(\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}t\right) + B_{n,m}\sin\left(\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}t\right)\right] +$$

$$+ \quad \sum_{n,m=0}^{\infty} \overline{\overline{v}}_{n,m}(r,\theta)\left[C_{n,m}\cos\left(\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}t\right) + D_{n,m}\sin\left(\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}t\right)\right].$$

Los coeficientes $A_{n,m}$, $B_{n,m}$, $C_{n,m}$ y $D_{n,m}$ se determinan a partir de las condiciones iniciales:

$$u(r,\theta,0) \quad = \quad \sum_{n,m=0}^{\infty} (A_{n,m}\overline{v} + C_{n,m}\overline{\overline{v}}) \ = \ f_1(r,\theta),$$

$$u_t(r,\theta,0) \quad = \quad \sum_{n,m=0}^{\infty} (B_{n,m}\overline{v} + D_{n,m}\overline{\overline{v}})\ \frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} = f_2(r,\theta).$$

lo cual completa la solución al problema.

6.8 Problemas propuestos

1- a) Resolver el problema de Cauchy en el espacio

$$u_{tt} = \Delta u,$$

con $u = \varphi(r)$ en $t = 0$ y $u_t = \psi(r)$ en $t = 0$.
b) Hallar $u(0,t)$.

2- Resolver

$$\Delta u = \frac{u_{tt}}{a^2},$$

en $\mathbb{R}^2$, con $u(x,y,0) = x^3y^2$, $u_t(x,y,0) = x^2y^4 - 3x^3$.
Sugerencia: utilizar la fórmula de Poisson.

3- Resolver

$$u_{tt} = a^2\Delta u,$$

en $\mathbb{R}^3$, con $u(x,y,z,0) = x^2 + y^2 + z^2$, $u_t(x,y,z,0) = xy$.
Sugerencia: utilizar la fórmula de Poisson.

4- Resolver

$$u_{tt} = a^2\Delta u,$$

en $\mathbb{R}^3$, con $u(x,y,z,0) = x^2z + xyz$, $u_t(x,y,z,0) = y^2 + xyz$.

5- Resolver

$$u_{tt} = a^2\Delta u + f(x,y,t),$$

en $\mathbb{R}^2$, con $u(x,y,0) = 0$, $u_t(x,y,0) = xy$.
Sugerencia: utilizar la fórmula integral de Kirchhoff.

6- Resolver

$$\Delta u = \frac{u_{tt}}{a^2} + xyt,$$

en $\mathbb{R}^2$, con $u(x,y,0) = 0$, $u_t(x,y,0) = xy$.
Sugerencia: utilizar la fórmula integral de Kirchhoff.

7- Verificar que $u(x,y) = J_0(\,\mu\sqrt{(z-w)\overline{z}}\,)$, con $z = x + \mathbf{i}y$, $w = \xi + \mathbf{i}\eta$, satisface la ecuación homogénea de Helmholtz en dos variables,

$$\Delta u + \mu^2 u = 0.$$

8- Hallar las oscilaciones permanentes de una membrana circular bajo la acción de una fuerza periódica, distribuida sobre la membrana con densidad constante $f = Asen(wt)$.
Sugerencia: utilizar la forma compleja para f y emplear separación de variables.

9- Aplicando transformada doble de Fourier resolver

$$u_{tt} = a^2\Delta u,$$

en $\mathbb{R}^2$, con $u(x,y,0)=\varphi(x,y)$, $u_t(x,y,0)=\psi(x,y)$.
Sugerencia: utilizar la fórmula

$$\int_0^\infty J_0(\rho r)\sin(a\rho t)\,d\rho = \begin{cases} 0 & at<r \\ \frac{1}{\sqrt{a^2t^2-r^2}} & at>r \end{cases}$$

(apéndice **E**).

10- Resolver

$$u_{tt}=a^2\Delta u+f(x,y,t),$$

en $\mathbb{R}^2$, si $u(x,y,0)=u_t(x,y,0)=0$.
Sugerencia: utilizar el ejercicio anterior y transformada de Laplace.

Soluciones a los problemas propuestos

1-a

$$u(r,t)=\frac{[(r+at)\phi(r+at)+(r-at)\phi(r-at)]}{2r}+\frac{1}{2ar}\int_{r-at}^{r+at}\xi\psi(\xi)d\xi \quad si \;\; t<r/a$$

$$u(r,t)=\frac{[(r+at)\phi(r+at)-(at-r)\phi(at-r)]}{2r}+$$
$$+\frac{1}{2ar}\left(\int_0^{at-r}\xi\psi(\xi)d\xi+\int_0^{at+r}\xi\psi(\xi)d\xi\right) \quad si \;\; t>r/a$$

1-b

$$u(0,t)=\phi(at)+at\phi'(at)+t\psi(at)$$

2-

$$u(x,y,t)=x^3y^2+(x^2y^4-3x^3)t+(x^3+3xy^2)a^2t^2+(3x^2y^2-9x/2+y^4/2)2x^2t^3/3$$
$$+xa^4t^4+(2y^2+x^2)a^4t^5/5+a^6t^7/35$$

3-

$$u(x,y,z,t)=xyt+3a^2t^2+x^2+y^2+z^2$$

4-

$$u=x^2z+xyz+y^2t+xyzt+za^2t^2+a^2t^3/3$$

5-

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^t d\tau\int_{D^M_{a(t-\tau)}}\frac{f(u,v,\tau)\,dudv}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(x-u)^2-(y-v)^2}}$$

6-

$$u(x,y,t) = xyt(1 - t^2/6)$$

8-

$$u(r,t) = A\left(\frac{a}{\omega}\right)^2 \left[J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) / J_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right) - 1\right] \sin(\omega t)$$

9-

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a} \int\int_{D_{at}^M} \frac{\psi(\xi,\eta)\ \ d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} +$$

$$+\frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int\int_{D_{at}^M} \frac{\varphi(\xi,\eta)\ \ d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}$$

10-

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t d\tau \int\int_{D_{at}^M} \frac{f(\xi,\eta,\tau)\ \ d\xi d\eta}{\sqrt{(a(t-\tau))^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}$$

Capítulo 7

Ecuaciones parabólicas en el espacio

En este capítulo estudiaremos la ecuación

$$a^2 \Delta u - u_t = -\frac{f}{c\rho}, \tag{7.1}$$

asociada a los procesos de conducción del calor en el espacio; ρ es la densidad del medio, c es el calor específico, k el coeficiente de conductividad térmica y $a^2 = k/(c\rho)$.
A menudo (7.1) se relaciona con procesos de difusión y en ese caso a^2 se interpreta como el coeficiente de difusión.

7.1 Función de Green

Para resolver la ecuación (7.1) recurrimos a la función de Green a ella asociada, para cuya obtención se requiere de algunos resultados preliminares que presentamos a continuación.

Proposición 7.1 *Si en el origen de coordenadas, $r = 0$, se sitúa una fuente de acción continua y potencia q, y en el resto del espacio la temperatura inicial es nula, entonces la temperatura se propaga según la ley*

$$u(r,t) = \frac{q}{2\pi k r\sqrt{\pi}} \int_{r/(2a\sqrt{t})}^{\infty} e^{-\mu^2}\, d\mu = q\, U(r,t), \tag{7.2}$$

donde $U(r,t)$ es la temperatura que corresponde a la fuente unitaria, $q = 1$.
Demostración: La fuente térmica en $r = 0$ da lugar a un flujo térmico por unidad de tiempo a través de la esfera Σ_ϵ con centro en $r = 0$ y radio ϵ, que

cuando $\epsilon \to 0$ es igual a q:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(-\int_{\Sigma_\epsilon} k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, dS\right) \;=\; q. \tag{7.3}$$

Por simetría, $\partial u/\partial \mathbf{n}$ es constante sobre la superficie esférica, entonces es

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(-k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}4\pi r^2\right)\rfloor_{r=\epsilon} \;=\; q. \tag{7.4}$$

Esto significa que $\partial u/\partial \mathbf{n}$ tiene en $r=0$ una singularidad del tipo $-q/(4\pi k r^2)$, y por lo tanto u tiene una singularidad del tipo $q/(4\pi k r)$ y resulta que $v = ru\rfloor_{r=0} = q/(4\pi k)$.
El problema para v consiste en

$$\begin{aligned} a^2 v_{rr} &= v_t, \\ v(0,t) &= \frac{q}{4\pi k}, \qquad v(r,0)=0, \end{aligned} \tag{7.5}$$

y su solución, tal como se mostró en el capítulo **4**, es

$$v(r,t) = \frac{q}{4\pi k}\left[1 - Erf\left(\frac{r}{2a\sqrt{t}}\right)\right] \;=\; \frac{q}{2\pi k\sqrt{\pi}}\int_{r/(2a\sqrt{t})}^{\infty} e^{-\mu^2}\, d\mu \;=\; r\,u(r,t). \tag{7.6}$$

La función de Green en el espacio resulta de considerar la acción de una fuente instantánea. Para ello se supone situada en el punto $P(\xi,\eta,\zeta)$ una fuente de potencia q continua durante un intervalo de tiempo τ. Esto equivale a accionar una fuente de potencia q en $t=0$ y otra de potencia $-q$ en $t=\tau$. Entonces, la temperatura en M de coordenadas (x,y,z) viene dada por

$$u_\tau(R,t) \;=\; q\,\left[U(R,t) - U(R,t-\tau)\right]. \tag{7.7}$$

con $R^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$. Durante el intervalo de tiempo τ se genera una cantidad de calor $Q = q\tau$, de donde resulta

$$u_\tau(R,t) = \frac{Q}{\tau}\,\left[U(R,t) - U(R,t-\tau)\right], \tag{7.8}$$

y considerando Q constante se obtiene

$$u_0(R,t) = \lim_{\tau\to 0} u_\tau(R,t) = Q\,\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{Q}{2^3\pi k\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-R^2/(4a^2t)}}{a t^{3/2}}, \quad k = a^2 c\rho, \tag{7.9}$$

la acción en M de una fuente instantánea en P. Con la notación

$$G(x-\xi, y-\eta, z-\zeta, t) = \frac{1}{8a^3(\pi t)^{3/2}}\; e^{-[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]/4a^2t}, \tag{7.10}$$

resulta

$$u_0(R,t) \;=\; \frac{Q}{c\rho}\, G(x-\xi, y-\eta, z-\zeta, t). \tag{7.11}$$

La función $G(x-\xi, y-\eta, z-\zeta, t)$ o *función de Green* asociada a la ecuación de conducción del calor en el espacio representa la temperatura en el punto $M(x,y,z)$, en el instante t, debida a la acción de una fuente puntual de potencia $Q = c\rho$, situada en el punto $P(\xi,\eta,\zeta)$ en $t=0$.
La función de Green verifica la propiedad

$$\int\!\int\!\int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi, y-\eta, z-\zeta, t)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \;=\; 1, \tag{7.12}$$

pues

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, d\xi \;=\; \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2}\, d\mu = 1. \tag{7.13}$$

De la expresión (7.10) se deduce que G es simétrica respecto de las variables espaciales, pero no del tiempo, lo que evidencia la irreversibilidad temporal de los procesos térmicos.

Para hallar la expresión de la *función de Green en dos dimensiones*, G_2, se considera una fuente lineal instantánea paralela al eje z y que pasa por $(\xi,\eta,0)$, de la que se desprende una cantidad de calor $\overline{Q}$ en $t=0$. La distribución de temperatura debida al aporte de la fuente a lo largo del eje z está dada por

$$\overline{u} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{Q}}{c\rho}\, G(x-\xi, y-\eta, z-\zeta, t)\; d\zeta. \tag{7.14}$$

y aplicando (7.13) resulta

$$\overline{u} \;=\; \frac{\overline{Q}}{c\rho}\, G_2, \tag{7.15}$$

con

$$G_2(x-\xi, y-\eta, t) \;=\; \frac{1}{4a^2\pi t}\, e^{-[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]/4a^2 t}. \tag{7.16}$$

Para hallar la *función de Green unidimensional*, G_1, se considera una fuente instantánea plana $\overline{\overline{Q}}$ en $t=0$, paralela al plano (y,z) y que pasa por el punto $(\xi,0,0)$, con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} \overline{\overline{u}} \;&=\; \int\!\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\overline{Q}}}{c\rho}\, G(x-\xi, y-\eta, z-\zeta, t)\; d\eta d\zeta \;= \\ &=\; \frac{\overline{\overline{Q}}}{c\rho}\, G_1(x-\xi, t) \end{aligned} \tag{7.17}$$

con

$$G_1(x-\xi, t) \;=\; \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-[(x-\xi)^2]/4a^2 t}, \tag{7.18}$$

tal como se obtuvo en el capítulo **4**.

7.2 Propagación del calor en el espacio

Para resolver el problema en el espacio, con $t > 0$,

$$a^2 \Delta u = u_t,$$

$$u(M, 0) = \phi(M), \qquad (7.19)$$

se recurre a la función de Green, teniendo en cuenta que en $t = 0$ y en cada punto del espacio hay una fuente de calor de potencia $c\rho\phi(\xi, \eta, \zeta)$. La temperatura en (x, y, z) en el instante t estará dada, aplicando el principio de superposición, por la expresión

$$u(x, y, z, t) \; = \; \int\int\int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, y - \eta, z - \zeta, t) \; \phi(\xi, \eta, \zeta) \; d\xi d\eta d\zeta, \qquad (7.20)$$

con $G(x - \xi, y - \eta, z - \zeta, t) = G(R_{MP}, t)$ dada por (7.10).
Dado que la fórmula (7.20) no se obtuvo mediante un método matemático riguroso, enunciaremos el teorema siguiente, cuya demostración puede verse en Tijonov & Samarsky (1972).

Teorema 7.1 *Si la función ϕ es seccionalmente continua, entonces la función u dada por (7.20):*
i) está acotada en todo el espacio,
ii) verifica $a^2 \Delta u = u_t$,
iii) $\lim_{t \to 0} \int\int\int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, y - \eta, z - \zeta, t) \, \phi(\xi, \eta, \zeta) \; d\xi d\eta d\zeta \; = \; \phi(x, y, z)$.

Para resolver la ecuación no homogénea en el espacio,

$$a^2 \Delta u = u_t - \frac{f}{c\rho} \qquad t > 0, \qquad (7.21)$$

con condición inicial nula,

$$u(M, 0) = 0, \qquad (7.22)$$

se aplica el principio de superposición teniendo en cuenta que hay aporte de temperatura no sólo en $t = 0$, sino durante todo el intervalo $0 < \tau < t$, de aquí que se proponga como solución al problema (7.21-7.22) la función

$$u(x, y, z, t) \; = \; \frac{1}{c\rho} \int_0^t \int\int\int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, y - \eta, z - \zeta, t - \tau) \, f(\xi, \eta, \zeta, \tau) \; d\xi d\eta d\zeta d\tau. \qquad (7.23)$$

El problema general en el espacio,

$$\begin{aligned} a^2 \Delta u - u_t &= -\frac{f}{c\rho}, \qquad t > 0, \\ u(M, 0) &= \phi(M), \end{aligned} \qquad (7.24)$$

tiene como solución la suma de (7.20) y (7.23).

7.3 Propagación del calor en regiones acotadas

Para una región T acotada, con frontera Σ, se establece el problema

$$\begin{aligned} a^2\Delta u &= u_t, \qquad t > 0, \\ u(M,0) &= \phi(M), \\ u\rfloor_\Sigma &= f(M,t), \quad M \in T,\ t > 0. \end{aligned} \tag{7.25}$$

Para resolverlo se define la función de Green a él asociada, $G(x-\xi, y-\eta, z-\zeta, t-\tau) = G(R_{MP}, t-\tau)$, que verifica:

i) $a^2\Delta G = G_t$,

ii) $G\rfloor_\Sigma = 0$,

iii) $G(R_{MP}, t-\tau) = e^{-[R^2{}_{MP}/4a^2(t-\tau)]}/8a^3[\pi(t-\tau)]^{3/2} + v(M, t-\tau)$,

con $M(x,y,z)$ y $P(\xi,\eta,\zeta)$.

La ecuación en *i)* puede escribirse

$$a^2\Delta G = -G_\tau. \tag{7.26}$$

De la segunda fórmula de Green,

$$\int_T (u\Delta G - G\Delta u)\, dV = \int_\Sigma (uG_{\mathbf{n}} - Gu_{\mathbf{n}})\, dS, \tag{7.27}$$

utilizando *i)* y *ii)* se obtiene

$$\int_T (uG_\tau + Gu_\tau)\, dV = -a^2 \int_\Sigma f(P,\tau)\, G_{\mathbf{n}}\, dS, \tag{7.28}$$

y luego de un intervalo de tiempo, $0 < \tau < t$,

$$\int_T \int_0^t \frac{\partial}{\partial\tau}(uG)\, d\tau dV = -a^2 \int_0^t \int_\Sigma f\, G_{\mathbf{n}}\, dS d\tau. \tag{7.29}$$

El primer término es

$$\int_T [(uG)\rfloor_{\tau=t} - (uG)\rfloor_{\tau=0}]\, dV = u(M,t) - \int_T \phi(P)\, G(R_{MP}, t)\, dV, \tag{7.30}$$

La solución al problema propuesto resulta entonces

$$u(M,t) = \int_T \phi(P)\, G(R_{MP}, t)\, dV - a^2 \int_0^t \int_\Sigma f(P,\tau) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(R_{MP}, t-\tau)\, dS d\tau. \tag{7.31}$$

7.4 Propagación del calor en un semiespacio

El resultado de la sección **7.3** se generaliza para regiones no acotadas, y se puede aplicar para resolver el problema siguiente:

$$a^2\Delta u = u_t, \qquad z \geq 0, \quad t > 0,$$

$$\begin{aligned} u(M,0) &= \phi(M), \qquad z \geq 0, \\ u\rfloor_{z=0} &= f(x,y,t), \qquad t > 0. \end{aligned} \tag{7.32}$$

Como en casos anteriores se utiliza el método de las imágenes respecto de $z = 0$ para determinar la función de Green

$$G(R_{MP}, t-\tau) = \frac{1}{8a^3[\pi(t-\tau)]^{3/2}} \left(e^{-R_{MP}^2/4a^2(t-\tau)} - e^{-R_{MP_1}^2/4a^2(t-\tau)} \right), \tag{7.33}$$

donde $P_1(\xi, \eta, -\zeta)$ es el conjugado respecto de $z = 0$ del punto $P(\xi, \eta, \zeta)$. Calculando

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n}\rfloor_{\zeta=0} &= -\left(\frac{\partial G}{\partial \zeta}\right)\rfloor_{\zeta=0} = \\ &= -\frac{z}{16a^5\pi^{3/2}(t-\tau)^{5/2}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \end{aligned} \tag{7.34}$$

de (7.31) se obtiene

$$\begin{aligned} u(M,t) &= \int_{z\geq 0} \phi(P)\, G(R_{MP}, t)\, dV - \\ &- a^2 \int_0^t \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta, \tau) \left(\frac{\partial G}{\partial \zeta}\right)\rfloor_{\zeta=0} \; d\xi d\eta d\tau. \end{aligned} \tag{7.35}$$

que provee la solución.

7.5 Problemas resolubles por separación de variables

Algunos problemas pueden tratarse mediante el método de separación de variables, no requiriendo de la determinación de la función de Green correspondiente.

A modo de ejemplo estudiaremos el problema del enfriamiento de un cilindro circular de eje z, radio r_0 e infinitamente largo, cuando su temperatura inicial es independiente de z y su superficie se mantiene a temperatura nula.

La temperatura variará sólo en un corte perpendicular al eje del cilindro por lo que, tomando coordenadas polares en el corte, se tiene el problema de hallar la función $u(r, \phi, t)$ que satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t},$$

con la condición inicial

$$u(r, \phi, 0) = \Phi(r, \phi), \qquad r < r_0,$$

y la de frontera

$$u(r_0, \phi, t) \;=\; 0.$$

Por el método de separación de variables puede verse que la solución es de la forma

$$u(M,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-a^2\lambda_n t} v_n(M),$$

donde las funciones propias v_n son solución del problema

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + \lambda^2 v \;&=\; 0, \qquad 0 < r < r_0,\;\; v \neq 0,\\
v(r_0,\phi) \;&=\; 0, \qquad |v(0,\vartheta)| < \infty,
\end{aligned}$$

que fue tratado al estudiar las oscilaciones de una membrana circular en el capítulo **6**.

A cada valor propio $\lambda_{nm} = \left(\mu_m^{(n)}/r_0\right)^2$ corresponden dos funciones

$$\begin{aligned}
\overline{v}_{nm} \;&=\; J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right)\,\cos n\phi,\\
\overline{\overline{v}}_{nm} \;&=\; J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right)\,\sin n\phi,
\end{aligned}$$

cuyas normas al cuadrado son

$$||\overline{v}_{nm}||^2 = ||\overline{\overline{v}}_{nm}||^2 = \frac{\pi\epsilon_n r_0^2}{2}\;[J_n'(\mu_m^{(n)})]^2,$$

con

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1, & n \neq 0\\ 2, & n = 0,\end{cases}$$

siendo $\mu_m^{(n)}$ la raíz m-ésima de $J_n = 0$. Luego, la solución se escribe

$$u(r,\phi,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\overline{c}_{nm}\cos n\phi \;+\; \overline{\overline{c}}_{nm}\sin n\phi\right)\,J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right)\;e^{-\left(\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2 t},$$

donde los coeficientes $\overline{c}_{nm}$ y $\overline{\overline{c}}_{nm}$ están dados por

$$\begin{aligned}
\frac{\pi r_0^2}{2}\,\overline{c}_{nm} \;&=\; \frac{\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\;\Phi(r,\phi)\;J_n(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r)\;\cos(n\phi)\;r d\phi dr}{\epsilon_n\;[J_n'(\mu_m^{(n)})]^2},\\
\frac{\pi r_0^2}{2}\,\overline{\overline{c}}_{nm} \;&=\; \frac{\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\;\Phi(r,\phi)\;J_n(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r)\;\sin(n\phi)\;r d\phi dr}{\epsilon_n[J_n'(\mu_m^{(n)})]^2}.
\end{aligned}$$

Si la temperatura inicial Φ depende sólo de r, la serie doble se sustituye por la serie simple

$$u(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty} c_m\ J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}r\right)\ \exp\left[-\left(\frac{a\mu_m^{(0)}}{r_0}\right)^2 t\right],$$

donde

$$c_m=\frac{2\int_0^{r_0}\ \Phi(r)\ J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}r\right)\ rdr}{r_0^2\ \left[J_0'(\mu_m^{(0)})\right]^2},$$

y $\mu_m^{(0)}$ es la raíz m-ésima de $J_0(\mu)=0$.

Si la temperatura inicial es constante,

$$u(r,0)=\Phi=u_0,$$

se tiene

$$c_m\ \ =\ \ \frac{2u_0\int_0^{r_0} J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}r\right) rdr}{r_0^2[J_1(\mu_m^{(0)})]^2}=\frac{2u_0}{\mu_m^{(0)}J_1(\mu_m^{(0)})},$$

puesto que $-J_0'=J_1$ y $\alpha J_0(\alpha)=[\alpha J_1(\alpha)]'$ (ver apéndice **E**); entonces resulta

$$u(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{2u_0 J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}r\right)}{\mu_m^{(0)}J_1(\mu_m^{(0)})}\right]\ \exp\left[-\left(\frac{a\mu_m^{(0)}}{r_0}\right)^2 t\right],$$

que es la solución al problema planteado.

7.6 Problemas propuestos

1- Hallar la distribución de temperatura en el espacio si la temperatura inicial es $u(x,y,z,0)=\phi(x,y,z)$. Utilizar transformada triple de Fourier.

2- Hallar la distribución de temperatura en el espacio si actúa una fuente de densidad $g(x,y,z,t)$ y la temperatura inicial es nula.
Sugerencia: utilizar transformada triple de Fourier.

3- Resolver

$$u_t=a^2\Delta u,$$

en $\mathbb{R}^2$, con $u(x,y,0)=1-(x^2+y^2)$.

4- Resolver

$$u_t = a^2 \Delta u + z^2 t,$$

con $u(x, y, z, 0) = xy$.

Soluciones a los problemas propuestos

1-

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{8a^3(\pi t)^{3/2}} \int\int\int_{-\infty}^{\infty} \phi(u, v, w) e^{\frac{-[(x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2]}{4a^2 t}} du\, dv\, dw$$

2-

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\int\int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta, \zeta) e^{i[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]} d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

$$U(\xi, \eta, \zeta) = \int_0^t G(\xi, \eta, \zeta) e^{-a^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)(t-\tau)} d\tau$$

$$G(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\int\int_{-\infty}^{\infty} g(u, v, w) e^{-i(\xi u+\eta v+\zeta w)} dudvdw$$

3-

$$u(x, y, t) = 1 - (x^2 + y^2) - 4a^2 t$$

4-

$$u(x, y, z, t) = xy + z^2 t^2/2 + a^2 t^3/3$$

Capítulo 8

Teoría de potencial

En este capítulo se obtienen soluciones para ecuaciones de tipo elíptico por medio de integrales que se presentan con frecuencia en la física y que se conocen como potenciales.

8.1 Potencial de volumen y potencial logarítmico

8.1.1 Definiciones

Si se tiene una distribución de masa en el espacio, para un cuerpo T de densidad ρ, su potencial en el punto M está dado por

$$u(M) = \int_T \frac{\rho_{(P)}}{R_{MP}} \, dV_P, \tag{8.1}$$

con $M(x, y, z)$ y $P(\xi, \eta, \zeta)$, llamado también *potencial de volumen*.

Si el punto $M \notin T$ y la densidad ρ es acotada, se puede derivar (8.1) bajo el signo integral y se obtienen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= X = -\iiint_T \rho(\xi, \eta, \zeta) \, \frac{(x-\xi)}{R^3} \, d\xi d\eta d\zeta, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= Y = -\iiint_T \rho(\xi, \eta, \zeta) \, \frac{(y-\eta)}{R^3} \, d\xi d\eta d\zeta, \\
\frac{\partial u}{\partial z} &= Z = -\iiint_T \rho(\xi, \eta, \zeta) \, \frac{(z-\zeta)}{R^3} \, d\xi d\eta d\zeta,
\end{aligned} \tag{8.2}$$

por lo tanto, u es el potencial del campo de componentes X, Y, Z.

Si se calcula el laplaciano de (8.1) para los puntos $M \notin T$, se obtiene

$$\Delta u(M) = \int_T \rho(P) \ \Delta\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) \ dV_P = 0, \tag{8.3}$$

y el potencial u satisface la ecuación de Laplace en el espacio.

Para una distribución de masa en el plano en una región S de densidad $\mu(\xi,\eta)$, se llama *potencial logarítmico* a

$$u(M) = 2\int_S \mu(P) \ \ln\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) \ dS_P, \tag{8.4}$$

con $M(x,y)$ y $P(\xi,\eta)$.
El potencial logarítmico es solución de la ecuación de Laplace en el plano para los puntos $M \notin S$; además,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(M) &= X(M) = -2\iint_S \mu(\xi,\eta)\frac{(x-\xi)}{R^2}\, d\xi d\eta, \\
\frac{\partial u}{\partial y}(M) &= Y(M) = -2\iint_S \mu(\xi,\eta)\frac{(y-\eta)}{R^2}\, d\xi d\eta, \qquad (8.5)
\end{aligned}$$

son las componentes del campo de fuerzas en el punto M generado por el potencial $u(x,y)$.

Si $M \in T$ en (8.1) o $M \in S$ en (8.4), las integrales son impropias y el comportamiento de las componentes del campo en tal caso se analizan en el punto siguiente.

8.1.2 Derivadas del potencial

Si $M \in T$, las integrales

$$u(M) = \int_T \frac{\rho_{(P)}}{R_{MP}} \ dV_P, \tag{8.6}$$

y

$$\begin{aligned}
X(M) &= -\iiint_T \rho(P)\,\frac{(x-\xi)}{R_{MP}^3}\, d\xi d\eta d\zeta, \\
Y(M) &= -\iiint_T \rho(P)\,\frac{(y-\eta)}{R_{MP}^3}\, d\xi d\eta d\zeta, \\
Z(M) &= -\iiint_T \rho(P)\,\frac{(z-\zeta)}{R_{MP}^3}\, d\xi d\eta d\zeta, \qquad (8.7)
\end{aligned}$$

son impropias y no se puede afirmar que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M) = X(M), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(M) = Y(M), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(M) = Z(M). \tag{8.8}$$

Cuando la densidad es acotada, $|\rho| < A$, el integrando en (8.6) está acotado por

$$\left|\frac{\rho}{R}\right| < \frac{A}{R}, \tag{8.9}$$

donde $R = R_{MP}$, y dado que

$$\int_T \frac{dV}{R^\alpha} \tag{8.10}$$

converge si $\alpha < 3$ (ver apéndice **A**), entonces (8.6) converge.
Lo mismo sucede para (8.7), pues si la densidad $|\rho| < A$, es

$$|\rho| \, \frac{|x-\xi|}{R^3} = \frac{|\rho|}{R^2} \, \frac{|x-\xi|}{R} < \frac{A}{R^2}, \tag{8.11}$$

dado que $|x - \xi| < R$.

En el teorema que sigue se demuestra que con sólo la condición de acotación de ρ se puede derivar bajo el signo integral aún en el caso en que $M \in T$.

Teorema 8.1 *Si T es abierto y $|\rho| < A$, entonces para el potencial de volumen se verifican*

$$X(M) = u_x(M), \;\; Y(M) = u_y(M), \;\; Z(M) = u_z(M). \tag{8.12}$$

Demostración: Según la definición de derivada parcial, para $\epsilon > 0$ debe existir $\delta(\epsilon) > 0$ de modo que si $\Delta x < \delta$ se verifique

$$\left|\frac{u(x+\Delta x, y, z) - u(x, y, z)}{\Delta x} - X\right| < \epsilon, \tag{8.13}$$

con (x, y, z) coordenadas del punto M.
Sean $T_1 = K^M_{\delta_1} \subset T$, $T_2 = T - T_1$ y $u_i = \int_{T_i} (\rho/R)\, dV$, para $i = 1, 2$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{u(x+\Delta x, y, z) - u(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{u_1(x+\Delta x, y, z) - u_1(x, y, z)}{\Delta x} + \\ + \frac{u_2(x+\Delta x, y, z) - u_2(x, y, z)}{\Delta x}.\end{aligned} \tag{8.14}$$

Dado que $M \notin T_2$, es

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = X_2 = \int_{T_2} \rho \, \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) dV. \tag{8.15}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\left|\frac{u(x+\Delta x,y,z)-u(x,y,z)}{\Delta x}-X\right| &\leq \left|\frac{u_2(x+\Delta x,y,z)-u_2(x,y,z)}{\Delta x}-X_2\right|+\\ &+ \quad |X_1|+\left|\frac{u_1(x+\Delta x,y,z)-u_1(x,y,z)}{\Delta x}\right|.\end{aligned}$$

El primer sumando de la derecha puede hacerse menor que $\epsilon/3$ para $|\Delta x| < \delta_2$, además

$$\begin{aligned}|X_1| &= \left|\int_{T_1}\rho\,\frac{(x-\xi)}{R^3}\;dV\right| < A\int_0^{\delta_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\;d\theta\,d\phi\,dr\\ &= 4\pi A\delta_1 < \frac{\epsilon}{3};\end{aligned} \tag{8.16}$$

por último,

$$\begin{aligned}\left|\frac{u_1(x+\Delta x,y,z)-u_1(x,y,z)}{\Delta x}\right| &= \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{T_1}\rho\,\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R}\right)dV\right|\\ &= \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{T_1}\rho\frac{R-R_1}{RR_1}dV\right|,\end{aligned} \tag{8.17}$$

si $\Delta x < \delta_1$ y donde $R_1^2=[(x+\Delta x)-\xi]^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=R^2_{M_1P}$.

El triángulo formado por $M(x,y,z),\ P(\xi,\eta,\zeta)$ y $M_1(x+\Delta x,y,z)$ tiene lados R, R_1, y Δx, por lo que

$$|R-R_1|\leq\Delta x, \tag{8.18}$$

y

$$\left|\frac{1}{\Delta x}\int_{T_1}\rho\,\frac{R-R_1}{RR_1}\,dV\right| \leq A\int_{T_1}\frac{dV}{RR_1} \;\leq\; \frac{A}{2}\left(\int_{T_1}\frac{dV}{R^2}+\int_{T_1}\frac{dV}{R_1^2}\right), \tag{8.19}$$

pues para a y b cualesquiera se verifica

$$a\,b\;\leq\;\frac{1}{2}\,(a^2+b^2). \tag{8.20}$$

Calculando las integrales sobre T_1 resultan

$$\begin{aligned}\int_{T_1}\frac{dV}{R^2} &= 4\pi\delta_1,\\ \int_{T_1}\frac{dV}{R_1^2}\;\leq\;\int_{K^{M_1}_{2\delta_1}}\frac{dV}{R_1^2} &= 8\pi\delta_1.\end{aligned} \tag{8.21}$$

Elegimos δ_1 de modo que

$$\left|\frac{u_1(M_1)-u_1(M)}{\Delta x}\right|\;\leq\;6\pi A\delta_1\;<\;\frac{\epsilon}{3}, \tag{8.22}$$

con lo cual también se verifica (8.16).
Si $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces para $|\Delta x| < \delta$ se satisface (8.13).

8.1.3 Ecuación de Poisson asociada a un potencial

Teorema 8.2 *Sea T una región abierta y acotada de $\mathbb{R}^3$, de frontera Σ. Si la densidad ρ es acotada y tiene derivadas continuas en $T+\Sigma$ y $M \in T$, entonces el potencial de volumen u asociado a T satisface la ecuación*

$$\Delta u(M) = -4\pi\rho(M). \tag{8.23}$$

Con las mismas hipótesis, en $\mathbb{R}^2$ se verifica que

$$\Delta u(M) = -2\pi\mu(M). \tag{8.24}$$

Demostración: Se consideran las regiones $T_1 = K_\delta^M \subset T$ y $T_2 = T - T_1$ y las funciones $u_i = \int_{T_i} (\rho/R)\, dV$, para $i = 1, 2$; como $M \notin T_2$ es $\Delta u_2(M) = 0$, por lo que basta analizar $\Delta u_1(M)$. En virtud del teorema anterior tenemos que

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \int_{T_1} \rho \,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)\, dV = -\int_{T_1} \rho\, \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{R}\right)\, dV. \tag{8.25}$$

Utilizando la fórmula de Gauss,

$$\int_{T_1} \frac{\partial F}{\partial x}\, dV \;=\; \int_{\Sigma_1} F(P)\, \cos\alpha dS_P \;=\; \iint_{\Sigma_1} F(P)\, d\eta d\zeta, \tag{8.26}$$

donde α es el ángulo que forma la normal exterior a $\Sigma_1 = \Sigma_\delta^M$ en P con el eje x, resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= -\int_{T_1} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\rho}{R}\right)\, dV + \int_{T_1} \frac{1}{R}\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\, dV \\ &= -\iint_{\Sigma_1} \frac{\rho}{R}\, d\eta d\zeta + \int_{T_1} \frac{1}{R}\,\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\, dV. \end{aligned} \tag{8.27}$$

El primer sumando es una función derivable en M, el segundo es un potencial de volumen de densidad $\partial\rho/\partial\xi$, y dado que ρ es una función con derivadas primeras continuas en $T+\Sigma$, es $|\partial\rho/\partial\xi\,| < C$ en T_1 y la ecuación (8.27) se puede derivar respecto de x.
La derivada del segundo sumando en (8.27) está acotada por $4\pi C\delta$, en tanto que la derivada del primer sumando es

$$\iint_{\Sigma_1} \rho\, \frac{(x-\xi)}{R^3}\, d\eta d\zeta \;=\; -\iint_{\Sigma_1} \frac{\rho}{R^2}\, \cos\alpha\, d\eta d\zeta$$

$$= \quad -\int_{\Sigma_1} \frac{\rho}{R^2} \cos^2 \alpha \, dS. \tag{8.28}$$

Considerando que

$$\Delta u = \lim_{\delta \to 0} (\Delta u_1 + \Delta u_2) = \lim_{\delta \to 0} \Delta u_1, \tag{8.29}$$

y que

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta \to 0} \Delta u_1(M) &= -\lim_{\delta \to 0} \int_{\Sigma_\delta^M} \rho \, \frac{(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)}{R^2} \, dS = \\
&= -\lim_{\delta \to 0} \int_{\Sigma_\delta^M} \frac{\rho}{R^2} \, dS,
\end{aligned} \tag{8.30}$$

tomando coordenadas esféricas con centro M se obtiene

$$\begin{aligned}
\Delta u &= -\lim_{\delta \to 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho(x + \delta \cos\phi \sin\theta, y + \delta \sin\phi \sin\theta, z + \delta \cos\theta) \sin\theta d\theta d\phi \\
&= -4\pi \rho(M).
\end{aligned} \tag{8.31}$$

Entonces, para $M \in T$, es

$$\Delta u(M) = -4\pi \rho(M). \tag{8.32}$$

8.1.4 Aplicación del potencial de volumen a la resolución de problemas de contorno

Se considera la ecuación de Poisson

$$\Delta u(M) = -F(M), \tag{8.33}$$

en una región acotada T de frontera Σ. Si F es acotada y tiene derivadas primeras continuas en $T + \Sigma$, una solución particular es

$$v = \frac{1}{4\pi} \int_T \frac{F(P)}{R_{MP}} \, dV_P. \tag{8.34}$$

Por lo tanto, una solución de (8.33) es

$$u = v + w, \tag{8.35}$$

con w solución de $\Delta w = 0$ en T.
La solución del problema interior para (8.33), con

$$u\rfloor_\Sigma = f, \tag{8.36}$$

es $u = v+w$, con v dada por (8.34) y donde w es solución del problema interior de Dirichlet en T,

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0, \\ w\rfloor_\Sigma &= f - v\rfloor_\Sigma. \end{aligned} \tag{8.37}$$

8.2 Potenciales de superficie y de línea

Se considera en $\mathbb{R}^3$ una superficie Σ orientada, es decir, con interior y exterior, sobre la cual se considera la normal exterior.
Se denomina *potencial de simple capa* a la función u tal que

$$u(M) = \int_\Sigma \frac{\mu(P)}{R_{MP}}\, dS_P, \tag{8.38}$$

donde $\mu(P)$ es la densidad superficial.

Se denomina *potencial de doble capa* a la función w tal que

$$w(M) = -\int_\Sigma \nu(P)\, \frac{d}{d\mathbf{n}_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\, dS_P, \tag{8.39}$$

donde $\nu(P)$ es la densidad superficial.

Si C es una curva orientada en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbf{n}_P$ su normal exterior en P, se denomina *potencial de simple capa* a la función

$$u(M) = \int_C \mu(P)\, \ln\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) ds_P, \tag{8.40}$$

y *potencial de doble capa* a

$$w(M) = -\int_C \nu(P)\, \frac{d}{d\mathbf{n}_P}\left(\ln\frac{1}{R_{MP}}\right)\, ds_P, \tag{8.41}$$

con μ y ν densidades lineales.

Nótese que para $M \notin \Sigma$ (o $M \notin C$) se puede derivar bajo el signo integral por lo que los potenciales de simple y doble capa son funciomes armónicas fuera de Σ (o de C). En cambio, en los puntos de la superficie (o la curva) son integrales impropias.
Los potenciales de doble capa pueden escribirse

$$\begin{aligned} w(M) &= \int_\Sigma \nu\, \frac{\cos\phi}{R^2}\, dS, \qquad si\ \ M \in \mathbb{R}^3, \\ w(M) &= \int_C \nu\, \frac{\cos\phi}{R}\, ds, \qquad si\ \ M \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \tag{8.42}$$

donde ϕ es el ángulo entre R_{MP} y $\mathbf{n}_P$.
El comportamiento de los potenciales de superficie y de línea se describe en los teoremas que siguen.

Discontinuidad del potencial de doble capa

Sea Σ una superficie cerrada, frontera de una región abierta T de $\mathbb{R}^3$, y $M_0 \in \Sigma$. Se definen las funciones

$$\begin{aligned} w_i(M_0) &= \lim_{M \to M_0} w(M), \quad con \;\; M \in T, \\ w_e(M_0) &= \lim_{M \to M_0} w(M), \quad con \;\; M \notin T + \Sigma, \end{aligned} \tag{8.43}$$

donde $w(M)$ es el potencial de doble capa en $\mathbb{R}^3$.
En $\mathbb{R}^2$ se dan definiciones análogas.

Antes de demostrar la discontinuidad del potencial de doble capa, consideraremos un caso particular importante que da cuenta del comportamiento de este potencial cuando la densidad es constante.

Proposición 8.1 *Sea Σ una superficie cerrada con normal variando con continuidad y que limita una región abierta T. Entonces, el potencial de doble capa sobre Σ, con densidad constante ν_0 verifica*

$$w^0(M) = \nu_0 \begin{cases} 4\pi, & M \in T, \\ 2\pi, & M \in \Sigma, \\ 0, & M \notin T + \Sigma. \end{cases} \tag{8.44}$$

En $\mathbb{R}^2$, si C es una curva con tangente variando con continuidad y que limita una región abierta S, entonces el potencial de doble capa sobre C con densidad constante ν_0 es

$$w^0(M) = \nu_0 \begin{cases} 2\pi, & M \in S, \\ \pi, & M \in C, \\ 0, & M \notin S + C. \end{cases} \tag{8.45}$$

Demostración: Por simplicidad se demuestra primero en $\mathbb{R}^2$, con

$$w^0(M) = \int_C \nu_0 \frac{\cos\phi}{R}\, ds. \tag{8.46}$$

En la figura 8.1 se ha tomado $M \in S$, un eje de referencia y $P \in C$.
Se tiene $ds \cos\phi = d\sigma = R d\alpha$, y

$$w^0(M) = \nu_0 \int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi\nu_0. \tag{8.47}$$

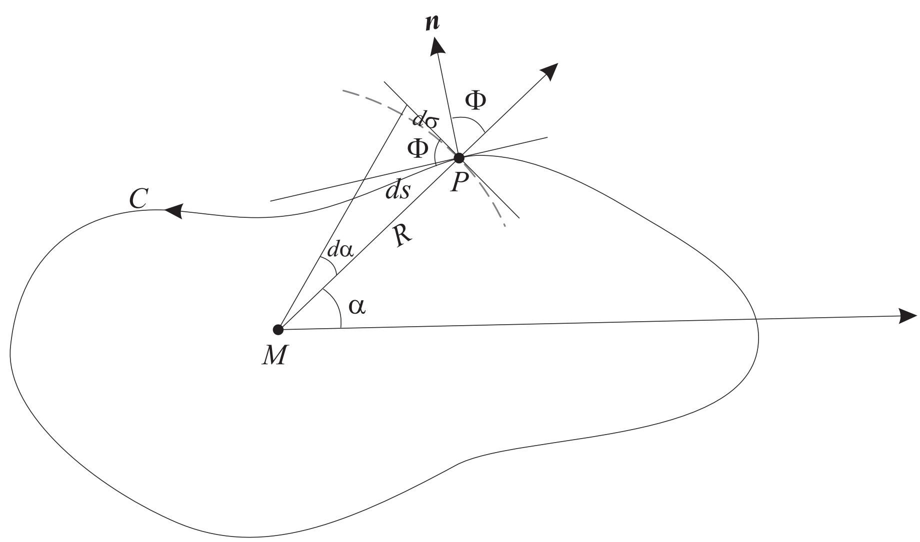


Figura 8.1: $d\alpha$ es el ángulo con vértice en $M \in S$ desde el cual se ve el diferencial de arco ds de la curva C.

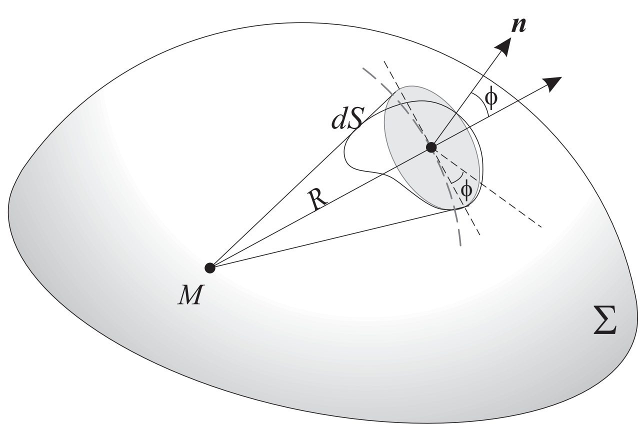


Figura 8.2: $d\alpha$ es el ángulo sólido bajo el cual se ve, desde $M \in T$, el diferencial de superdicie dS de Σ.

Los otros casos se analizan de la misma forma.

Análogamente, en $\mathbb{R}^3$ se tiene $dS\cos\phi = R^2 d\alpha$ (ver figura 8.2), y

$$w^0(M) \,=\, \nu_0 \int_{\Sigma_M^R} d\alpha \,=\, 4\pi\nu_0, \tag{8.48}$$

para $M \in T$, siendo α el ángulo sólido bajo el cual se ve, desde M, dS.

Corolario: *Si $M_0 \in \Sigma$, en $\mathbb{R}^3$, entonces*

$$\begin{aligned} w_i^0(M_0) &= 4\pi\nu_0 = w^0(M_0) + 2\pi\nu_0, \\ w_e^0(M_0) &= 0 = w^0(M_0) - 2\pi\nu_0. \end{aligned} \tag{8.49}$$

Si $M_0 \in C$, en $\mathbb{R}^2$ es

$$\begin{aligned} w_i^0(M_0) &= 2\pi\nu_0 = w^0(M_0) + \pi\nu_0, \\ w_e^0(M_0) &= 0 = w^0(M_0) - \pi\nu_0. \end{aligned} \tag{8.50}$$

Para el potencial de doble capa con ν variable se demuestra el teorema que sigue.

Teorema 8.3 *Sea Σ una superficie cuyo plano tangente varía con continuidad y formada por un número finito de superficies convexas (una superficie se dice convexa si todo plano la corta a lo sumo en una curva cerrada). Sea T la región acotada y abierta encerrada por Σ, y $\nu(M)$ continua.*

Entonces, si $M_0 \in \Sigma$ el potencial de doble capa con densidad ν existe y tiene una discontinuidad de primera clase sobre Σ dada por

$$\begin{aligned} w_i(M_0) &= w(M_0) + 2\pi\nu(M_0), \\ w_e(M_0) &= w(M_0) - 2\pi\nu(M_0), \qquad M_0 \in \Sigma, \end{aligned} \tag{8.51}$$

o bien,

$$w(M_0) = \frac{w_i(M_0) + w_e(M_0)}{2} \tag{8.52}$$

Demostración: Consideremos la función

$$I(M) = w(M) - w^0(M) = \int_\Sigma (\nu(P) - \nu_0)\ \frac{\cos\phi}{R^2}\ dS, \tag{8.53}$$

con $\nu_0 = \nu(M_0)$. Veremos que esta función converge uniformemente en M_0 y por tanto es continua en ese punto.

Dado que Σ está formada por un número finito de superficies convexas, es

$$\int_\Sigma \frac{|\cos\phi|}{R_{MP}^2}\ ds_P < A_\Sigma, \tag{8.54}$$

con A_Σ múltiplo de 4π (según la convexidad de Σ).
Si $\epsilon > 0$, para $\epsilon_1 = \epsilon / A_\Sigma$ existe $\delta(\epsilon_1)$ tal que $|\nu(P) - \nu_0| < \epsilon_1$ para $|P - M_0| < \delta$.
Sea Σ_1 un entorno de M_0 en Σ de diámetro δ, y sea

$$I_1(M) = \int_{\Sigma_1} (\nu(P) - \nu_0) \ \frac{\cos\phi}{R^2} \ dS, \tag{8.55}$$

entonces

$$|I_1(M)| < \epsilon_1 \int_{\Sigma_1} \frac{|\cos\phi|}{R^2} \ dS \leq \epsilon_1 A_\Sigma = \epsilon. \tag{8.56}$$

Es decir que $I(M)$ converge uniformemente en M_0, lo que implica su continuidad en dicho punto. Pero entonces $w(M)$ tiene en M_0 una discontinuidad del mismo tipo que $w^0(M)$. Esto significa que existen $w_i(M_0)$ y $w_e(M_0)$ y, dada la continuidad de $I(M)$, es

$$\begin{aligned} w_i(M_0) &= I(M_0) + w_i^0(M_0) = I(M_0) + w^0(M_0) + 2\pi\nu_0 \\ &= w(M_0) + 2\pi\nu(M_0). \end{aligned} \tag{8.57}$$

De la misma forma se obtiene $w_e(M_0)$ y se prueba la existencia de $w(M_0)$.
Las fórmulas correspondientes en $\mathbb{R}^2$ son

$$\begin{aligned} w_i(M_0) &= w(M_0) + \pi\nu(M_0), \\ w_e(M_0) &= w(M_0) - \pi\nu(M_0). \end{aligned} \tag{8.58}$$

Propiedades del potencial de capa simple

En esta sección se supone que la superficie Σ posee plano tangente que varía con continuidad.
Proposición 8.2 *Si $|\mu| < A$, el potencial de capa simple,*

$$u(M) = \int_\Sigma \frac{\mu}{R} \ dS, \tag{8.59}$$

es una función continua en $\mathbb{R}^3$.
En $\mathbb{R}^2$ la afirmación anterior es válida para el potencial de capa simple sobre una curva cuya tangente varía con continuidad.
Demostración: La función u es continua en puntos que no pertenecen a Σ y, como demostraremos, es uniformemente convergente en los puntos de Σ.
Sean $M_0 \in \Sigma$, Σ_1 un entorno de M_0 de diámetro δ, y

$$u_1(M) = \int_{\Sigma_1} \frac{\mu(P)}{R_{MP}} \ dS_P. \tag{8.60}$$

Tomemos un sistema de coordenadas (ξ, η, ζ) con centro en M_0, y el eje ζ en la dirección de la normal exterior a Σ en M_0. Sea $M \in \Sigma_1$ y Σ_1' la proyección de Σ_1 sobre (ξ, η), si $M = M(x, y, z)$ y $M'(x, y, 0)$ entonces $\Sigma_1' \subset (K_{M'}^{2\delta} \cap \mathbb{R}) = W$,

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \geq \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \\ dS &= \frac{dS'}{\cos\gamma} = \frac{d\xi d\eta}{\cos\gamma}, \end{aligned} \tag{8.61}$$

siendo dS' la proyección de dS sobre el plano (ξ, η). En consecuencia, es

$$\begin{aligned} |u_1(M)| &< A \int_{\Sigma_1} \frac{dS}{R} = A \int_{\Sigma_1'} \frac{d\xi d\eta}{R\cos\gamma} \leq \\ &\leq 2A \int_{\Sigma_1'} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \\ &\leq 2A \int_W \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}. \end{aligned} \tag{8.62}$$

En esta desigualdad se ha considerado δ suficientemente pequeño de modo que $\cos\gamma > 1/2$.
Si se introducen coordenadas polares con centro M' es

$$|u_1| < 2A \int_0^{2\pi} \int_0^{2\delta} d\rho d\phi = 8\pi A\delta, \tag{8.63}$$

con δ suficientemente pequeño. Además dado un $\epsilon > 0$, se toma $\delta \leq \epsilon/(8\pi A)$, de modo que si $|M - M_0| < \delta$ es $|u_1(M)| < \epsilon$, o sea, u converge uniformemente en Σ, y esto implica que u es continua en Σ.

Finalmente, consideraremos la derivada normal de un potencial de capa simple. Sea $M_0 \in \Sigma$, $\mathbf{n}$ la normal exterior en M_0 y T un volumen abierto y acotado limitado por Σ, para $M \in \mathbf{n}$ se definen

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)_i (M_0) &= \lim_{M \to M_0} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(M), \quad M \in T \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)_e (M_0) &= \lim_{M \to M_0} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(M), \quad M \notin T + \Sigma. \end{aligned} \tag{8.64}$$

Si se toma la normal interior en lugar de la exterior, las definiciones son las mismas.

Teorema 8.4 *Sea Σ una superficie cuyo plano tangente varía con continuidad y formada por un número finito de superficies convexas. Sea T la región acotada y abierta encerrada por Σ y sea $\mu(M)$ continua.*

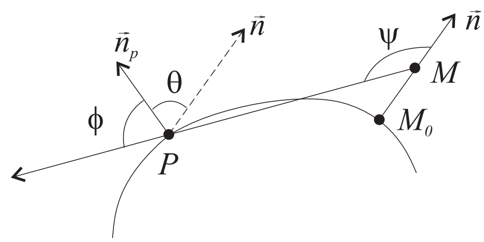


Figura 8.3: Gráfico de la superficie Σ donde se indican las cantidades que intervienen en la definición de $u_{\mathbf{n}}(M)$.

Siendo u el potencial de capa simple y $\mathbf{n}$ la normal exterior en $M_0 \in \Sigma$, resultan

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)_i (M_0) = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(M_0) - 2\pi\mu(M_0),$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)_e (M_0) = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(M_0) + 2\pi\mu(M_0). \tag{8.65}$$

Si $\mathbf{n}$ es la normal interior se intercambian los valores de $(\partial u/\partial \mathbf{n})_i$ y $(\partial u/\partial \mathbf{n})_e$.

Demostración: El potencial en $M \in \mathbf{n}$, $M \notin \Sigma$ (ver figura 8.3) puede derivarse bajo el signo integral por lo que se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(M) = \int_\Sigma \mu(P)\, \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\, dS = -\int_\Sigma \mu\, \frac{\cos\psi}{R^2}\, dS, \tag{8.66}$$

con ψ el ángulo entre R_{MP} y $\mathbf{n}$.
El potencial de capa doble es

$$w(M) = \int_\Sigma \mu\, \frac{\cos\phi}{R^2}\, dS. \tag{8.67}$$

Dado que $\cos\psi = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi\cos\Omega$, donde Ω es el ángulo diedro de arista $\mathbf{n}_P$, resulta

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(M) &= -\int_\Sigma (\mu\cos\theta)\frac{\cos\phi}{R^2}\, dS - \int_\Sigma \frac{\mu\sin\theta\sin\phi\cos\Omega}{R^2}\, dS = \\ &= w_1(M) + I(M).\end{aligned} \tag{8.68}$$

Advertimos que w_1 es un potencial de capa doble con densidad $\mu_1(P) = -\mu(P)\cos\theta$ y la función $I(M)$ es continua en M_0 (la demostración es análoga a la del teorema correspondiente al potencial de doble capa).

Dado que el plano tangente varía con continuidad, cuando P tiende a M_0 el ángulo θ tiende a cero, entonces $\partial u/\partial \mathbf{n}(M_0)$ existe y tiene la misma discontinuidad que $w_1(M_0)$, por lo tanto

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)_i (M_0) = w_1(M_0) + 2\pi\mu_1(M_0) + I(M_0) = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(M_0) - 2\pi\mu(M_0) \quad (8.69)$$

Si se toma $\mathbf{n}$ como la normal interior, cuando P tiende a M_0, θ tiende a π y $\mu_1(M_0) = \mu(M_0)$.
Las fórmulas correspondientes a (8.65) en $\mathbb{R}^2$ son

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)_i (M_0) &= \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(M_0) - \pi\mu(M_0),\\ \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)_e (M_0) &= \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(M_0) + \pi\mu(M_0),\end{aligned} \quad (8.70)$$

donde u es el potencial de línea de capa simple.
Nota: Los teoremas sobre potenciales de capa simple y doble son válidos si la superficie Σ (o la curva C) tiene curvatura acotada.

8.3 Aplicación a la resolución de problemas de contorno para la ecuación de Laplace

Las ecuaciones diferenciales asociadas a estos problemas se transformarán en ecuaciones integrales (ver apéndice **F**).
Consideraremos superficies con plano tangente que varía con continuidad y curvas cuya tangente es continua.
Para resolver el problema interior de Dirichlet, que consiste en hallar una función continua en $T + \Sigma$, armónica en T y tal que verifique $u\rfloor_\Sigma = f$, con f continua, se recurre al potencial de doble capa. Es decir, se propone como solución la integral

$$u(M) = \int_\Sigma \nu(P)\,\frac{\cos\phi}{R^2_{MP}}\,dS_P, \quad (8.71)$$

que como mostramos es armónica en T, donde ϕ es el ángulo que forman R_{MP} y la normal en $P \in \Sigma$.
Como acabamos de ver, para $M_0 \in \Sigma$ es

$$u(M_0) + 2\pi\nu(M_0) = f(M_0), \quad (8.72)$$

que define a u como una función continua en $T + \Sigma$ por lo que $\nu(P)$ debe satisfacer la ecuación integral de Fredholm de segunda clase (ver apéndice **F**):

$$\int_\Sigma \nu(P)\,\frac{\cos\phi}{R^2_{M_0P}}\,dS_P + 2\pi\nu(M_0) = f(M_0). \quad (8.73)$$

En forma análoga, el problema exterior de Dirichlet tiene como solución al potencial (8.71), con $\nu(P)$ solución de la ecuación integral de Fredholm de segunda clase:

$$\int_{\Sigma} \nu(P) \frac{\cos\phi}{R^2_{M_0P}} \, dS_P - 2\pi\nu(M_0) = f(M_0). \tag{8.74}$$

En tanto, el problema interior de Neumann consiste en hallar una función armónica en T, continua en $T+\Sigma$ y tal que $\partial u/\partial \mathbf{n}\rfloor_{\Sigma} = f$, con f continua.
Buscamos la solución en forma de potencial de capa simple,

$$u(M) = \int_{\Sigma} \frac{\mu(P)}{R_{MP}} \, dS_P, \tag{8.75}$$

donde $\mu(P)$ es solución de la ecuación integral:

$$-2\pi\mu(M_0) - \int_{\Sigma} \mu(P) \frac{\cos\psi}{R^2_{M_0P}} \, dS_P = f(M_0), \tag{8.76}$$

con $M_0 \in \Sigma$, $\mathbf{n}$ la normal exterior en M_0 y ψ el ángulo entre R_{M_0P} y $\mathbf{n}$.
La solución al problema exterior de Neumann es (8.75), con $\mu(P)$ solución de la ecuación integral:

$$-2\pi\mu(M_0) + \int_{\Sigma} \mu(P) \frac{\cos\psi}{R^2_{M_0P}} \, dS_P = f(M_0). \tag{8.77}$$

En este caso hay que tener en cuenta que la normal considerada en la condición de frontera (normal exterior) tiene signo opuesto a la normal que se consideró en el último teorema demostrado, donde T es la región acotada. El ángulo ψ es el mismo que aparece en (8.76).
Para los problemas equivalentes en $\mathbb{R}^2$ consideramos curvas cuya tangente varía con continuidad y se proponen como solución los potenciales de línea recurriendo a las ecuaciones (8.58) para el caso de los problemas de Dirichlet interior y exterior, y a las ecuaciones (8.70) para los problemas de Neumann interior y exterior.

Ejemplo 1. Hallaremos la función u, armónica en un círculo de radio a, y que en la frontera C satisface la condición $u\rfloor_C = f$.

Para ello buscaremos la solución del 1° problema interior de contorno para el círculo en forma de potencial de doble capa,

$$w(M) = \int_C \frac{\cos\phi}{R_{MP}} \, \nu(P) \, ds_P.$$

Esta función, para cualquier elección de $\nu(P)$, satisface la ecuación de Laplace dentro del círculo, y es discontinua en C. Para que la solución sea continua

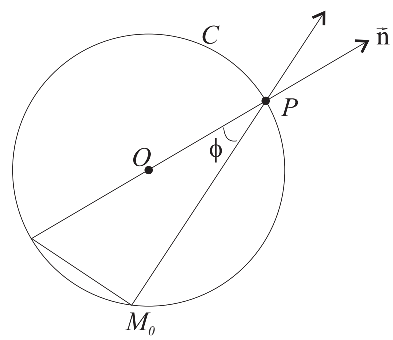


Figura 8.4: La normal exterior en el punto P tiene la dirección del diámetro y es $M_0 \in C$.

debe verificarse

$$w_i(M_0) = f(M_0), \quad M_0 \in C,$$

y, en virtud de la propiedad

$$w_i(M_0) = w(M_0) + \pi\nu(M_0),$$

se obtiene para $\nu(P)$ la ecuación integral

$$\pi\nu(M_0) + \int_C \frac{\cos\phi}{R_{M_0P}}\,\nu(P)\,ds_P = f(M_0).$$

Dado que la normal exterior en el punto P tiene la dirección del diámetro y $M_0 \in C$, es

$$\frac{\cos\phi}{R_{M_0P}} = \frac{1}{2a},$$

como muestra la figura 8.4.
Designando con s y s_0 a los arcos de C que corresponden a los puntos P y M_0 respectivamente, la ecuación integral para ν se escribe

$$\nu(s_0) + \frac{1}{2\pi a}\int_C \nu(s)\,ds = \frac{1}{\pi}f(s_0).$$

Proponiendo como solución (por la forma de la ecuación) a

$$\nu(s) = \frac{f(s)}{\pi} + A,$$

se determina la cantidad A de

$$\frac{1}{\pi}\,f(s_0) + A + \frac{1}{2\pi a}\int_C \left(\frac{1}{\pi}f(s) + A\right)\,ds = \frac{1}{\pi}\,f(s_0),$$

y se obtiene

$$A = -\frac{1}{4\pi^2 a} \int_C f(s)\, ds,$$

de modo que para este problema

$$\nu(s) = \frac{1}{\pi}\, f(s) - \frac{1}{4\pi^2 a} \int_C f(s)\, ds,$$

es la solución de la ecuación integral.
El correspondiente potencial de doble capa es

$$w(M) = \int_C \frac{\cos\phi}{R_{MP}} \left(\frac{1}{\pi} f(s) - \frac{1}{4\pi^2 a} \int_C f(s) ds \right) ds.$$

Si M es un punto interior al círculo,

$$\begin{aligned} w(M) &= \frac{1}{\pi} \int_C \frac{\cos\phi}{R_{MP}} f(s)\, ds - \left(\frac{1}{4\pi^2 a} \int_C f(s) ds \right) 2\pi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_C \left(\frac{\cos\phi}{R_{MP}} - \frac{1}{2a} \right) f(s)\, ds. \end{aligned}$$

La integral

$$\int_C \frac{\cos\phi}{R_{MP}}\, ds \;=\; 2\pi,$$

fue calculada al tratar la discontinuidad del potencial de doble capa. Tomando coordenadas polares con origen en el centro del círculo, y considerando el punto $M = M(r, \theta)$, y el triángulo OPM (ver figura 8.5), se deduce que

$$\frac{\cos\phi}{R_{MP}} - \frac{1}{2a} = \frac{2aR_{MP}\cos\phi - R_{MP}^2}{2aR_{MP}^2} = \frac{a^2 - r^2}{2a[a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \alpha)]}.$$

Así se arriba a la integral de Poisson

$$u = w(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - r^2)}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \alpha)}\, f(\alpha)\, d\alpha,$$

que es la solución del 1° problema de contorno para el círculo que obtuvimos en el capítulo **5** (ecuación (5.68)).

Ejemplo 2. Utilizando el potencial de doble capa, hallaremos una función armónica en $\mathbb{R}^3$, continua en $z \geq 0$, y que tome en la frontera $z = 0$ el valor dado $f(x, y)$.

Para esto hallaremos la solución en forma de potencial de doble capa, con

$$w(M) = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\phi}{R^2}\, \nu(\xi,\eta)\, d\xi d\eta,$$

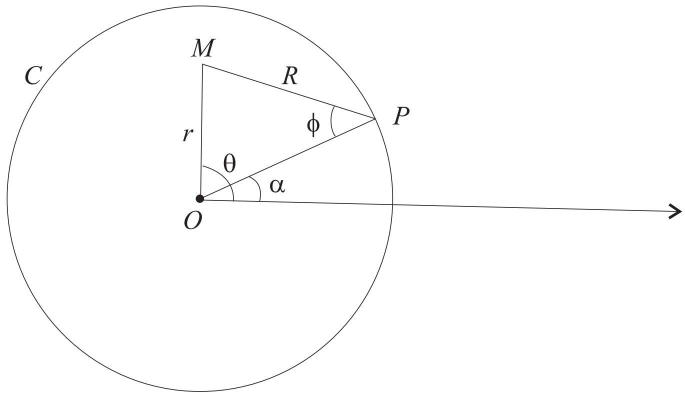


Figura 8.5: Triángulo OPM con $M(r,\theta)$ y $P(a,\alpha)$.

donde $R^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2$. En este caso es

$$\frac{\cos\phi}{R^2} = \frac{z}{R^3},$$

de modo que

$$\frac{\cos\phi}{R^2}\rfloor_{z=0} = 0,$$

y la ecuación integral para ν se reduce a

$$2\pi\nu(M_0) = f(M_0).$$

La solución es entonces

$$u(x,y,z) = \frac{z}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi,\eta)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{3/2}}\,d\xi d\eta.$$

8.4 Potenciales para la ecuación $\Delta u - k^2 u = 0$

Resultados análogos a los presentados en las secciones **8.1** y **8.2**, pueden obtenerse para los potenciales asociados a la ecuación de Helmholtz, $\Delta u - k^2 u = 0$, y a la ecuación $\Delta u + k^2 u = 0$.
Para la ecuación de Helmholtz, y con hipótesis análogas a las de las secciones **8.1** y **8.2**, se define el *potencial de volumen*

$$u(M) = \int_T \rho(P)\,\frac{e^{-kR_{MP}}}{R_{MP}}\,dV_P, \tag{8.78}$$

que, para el caso en que la densidad ρ es acotada, posee las siguientes propiedades:

- para $M \notin T$, $u(M)$ satisface la ecuación de Helmholtz;
- en T están definidas u y las funciones que se obtienen derivando bajo el signo integral;
- las derivadas primeras de u se calculan derivando bajo el signo integral;
- si u tiene derivadas segundas en T, para $M \in T$, $u(M)$ satisface la EDP:

$$\Delta u(M) - k^2 u(M) = -4\pi\rho(M). \tag{8.79}$$

Representación de un problema de contorno

En la región T de frontera Σ, una solución al problema de contorno definido por

$$\begin{aligned} \Delta u - k^2 u &= -F, \\ u\rfloor_\Sigma &= f, \end{aligned} \tag{8.80}$$

es $u = v + u_1$, con v potencial de volumen de densidad $\rho = F/4\pi$, y u_1 solución de la ecuación de Helmholtz con $u_1\rfloor_\Sigma = f - v\rfloor_\Sigma$.

Potencial de capa doble

El *potencial de capa doble* asociado a la ecuación de Helmholtz es

$$w(M) = -\int_\Sigma \nu(P)\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_P}\left(\frac{e^{-kR_{MP}}}{R_{MP}}\right) dS_P. \tag{8.81}$$

Este potencial verifica las siguientes propiedades:

- para $M \notin \Sigma$, w es solución de la ecuación de Helmholtz;
- w existe en $M_0 \in \Sigma$ y tiene una discontinuidad de primera especie dada por

$$\begin{aligned} w_i(M_0) &= w(M_0) + 2\pi\nu(M_0), \\ w_e(M_0) &= w(M_0) - 2\pi\nu(M_0). \end{aligned} \tag{8.82}$$

Representación de un problema de contorno

El 1° problema interior de contorno para la ecuación de Helmholtz consiste en

en hallar u continua en $T+\Sigma$, tal que verifique

$$\Delta u - k^2 u = 0, \quad en\, T$$
$$u\rfloor_\Sigma = f. \tag{8.83}$$

Se propone como solución al potencial de capa doble de modo que $\nu(P)$ verifique, para $M_0 \in \Sigma$

$$f(M_0) = 2\pi\nu(M_0) - \int_\Sigma \nu(P)\, \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_P}\left(\frac{e^{-kR_{M_0P}}}{R_{M_0P}}\right) dS_P. \tag{8.84}$$

Esta es una ecuación de Fredholm de segunda especie.

Potencial de capa simple

El *potencial de capa simple* asociado a la ecuación de Helmholtz es

$$u(M) = \int_\Sigma \mu(P) \left(\frac{e^{-kR_{MP}}}{R_{MP}}\right) dS_P, \tag{8.85}$$

y verifica las siguientes propiedades:

- para $M \notin T$, $u(M)$ satisface la ecuación de Helmholtz;
- u es una función continua;
- si $M_0 \in \Sigma$ y $\mathbf{n}$ es la normal exterior en M_0

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)_i (M_0) &= \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(M_0) - 2\pi\mu(M_0),\\ \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)_e (M_0) &= \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(M_0) + 2\pi\mu(M_0),\end{aligned} \tag{8.86}$$

  donde los términos de la izquierda representan los valores límites de la derivada normal desde el interior y exterior de Σ, respectivamente, en el punto M_0.

Representación de un problema de contorno

El 2° problema interior de contorno para la ecuación de Helmholtz consiste en hallar u continua en $T+\Sigma$, tal que

$$\Delta u - k^2 u = 0, \quad en\, T,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\rfloor_{\Sigma} \quad = \quad f. \tag{8.87}$$

Se recurre al potencial de capa simple de modo que μ quede determinada por la ecuación integral de Fredholm, con $M_0 \in \Sigma$,

$$f(M_0) = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(M_0) - 2\pi\mu(M_0), \tag{8.88}$$

y con

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(M_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \int_{\Sigma} \mu(P) \left(\frac{e^{-kR_{M_0P}}}{R_{M_0P}} \right) \, dS_P, \tag{8.89}$$

que se obtiene de (8.85).

8.5 Problemas Propuestos

1- Hallar el potencial de volumen de una esfera de densidad constante.

2- Hallar el potencial de volumen de masas distribuidas
a) con densidad constante en una capa esférica $a \leq r \leq b$,
b) con densidad constante ρ_1 en una esfera de radio a y con densidad constante ρ_2 en la capa esférica $b \leq r \leq c$, con $a < b$.

3- a) Hallar la densidad de una distribución de masas sobre un dominio D con la condición que el potencial de volumen de dichas masas es

$$u = 1 - (x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

b) Con los resultados de **a)** hallar la masa total que se encuentra en el interior de una esfera de radio R incluida en D.

4- Hallar el potencial de capa simple distribuido con densidad constante μ_0 sobre una superficie esférica de radio a.

5- Hallar el potencial de capa doble en $\mathbb{R}^2$ de un segmento con densidad constante.

6- Utilizando el potencial de doble capa hallar una función armónica continua en $z \geq 0$ tal que $u(x, y, 0) = f(x, y)$.

7- Demostrar que las soluciones fundamentales de $\Delta v + cv = 0$ que dependen de r en $\mathbb{R}^2$ son:
a) $H_0^{(1)}(kr)$, $H_0^{(2)}(kr)$, si $c = k^2$ donde $H_0^{(1)}$ y $H_0^{(2)}$ son las funciones de Hankel de primera y segunda especie de orden cero.
b) $I_0(kr)$, $K_0(kr)$, si $c = -k^2$ donde I_0 y K_0 son las funciones cilíndricas de argumento imaginario de orden cero (ver apéndice **E**).

8- a) Probar que las funciones

$u_\nu(r,\theta) = I_\nu(\mu r)\cos\nu\theta$
$v_\nu(r,\theta) = I_\nu(\mu r)\sin\nu\theta,$
con $I_\nu(\alpha)$ función cilíndrica de argumento imaginario de orden ν, (ver apéndice **E**) satisfacen la ecuación $\Delta u - \mu^2 u = 0$ ($r^2 = x^2 + y^2$; $x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$).
b) Idem para
$u_\nu(r,\theta) = K_\nu(\mu r)\cos\nu\theta$
$v_\nu(r,\theta) = K_\nu(\mu r)\sin\nu\theta,$
con K_ν funciones de Bessel modificadas de tercera clase.

9-a) Hallar la distribución estacionaria de concentración de un gas inestable dentro de un cilindro infinito de sección circular si se mantiene una concentración constante sobre la superficie del cilindro.
Este problema implica hallar la solución acotada de la ecuación bidimensional $\Delta u - k^2 u = 0$, $r < a$ con $u\rfloor_{r=a} = u_0$.
b) Resolver el problema anterior en $r > a$.

10- Hallar la función de Green y la solución del $1°$ problema de contorno para el semiespacio $z > 0$ y la ecuación $\Delta u + k^2 u = 0$, con $u\rfloor_{z=0} = f(x,y)$

11- Hallar la función de Green y resolver el $2°$ problema de contorno para $\Delta u + k^2 u = 0$, en $z > 0$ con $u_z\rfloor_{z=0} = f(x,y)$

Soluciones a los problemas propuestos

1-

$$u(M) = \begin{cases} 4\pi a^3\rho_0/3R_0, & R_0 > a, \\ 2\pi\rho_0(a^2 - R_0^2/3) & R_0 < a, \end{cases}$$

con R_0 distancia de M al centro de la esfera de radio a.

2-a

$$u(M) = \begin{cases} 2\pi\rho_0(b^2 - a^2),, & R_0 < a \\ 2\pi\rho_0(b^2 - 2a^3/3R_0 - R_0^2/3), & a < R_0 < b, \\ 4\pi\rho_0(b^3 - a^3)/3R_0 & b < R_0, \end{cases}$$

con R_0 distancia de M al centro.
2-b

$$u(M) = \begin{cases} 2\pi\rho_1(a^2 - R_0^2/3) + 2\pi\rho_2(c^2 - b^2), & R_0 < a, \\ 4\pi\rho_1 a^3/3R_0 + 2\pi\rho_2(c^2 - b^2), & a < R_0 < b, \\ 4\pi[\rho_1 a^3 + \rho_2(R_0^3 - b^3)]/3R_0 + 2\pi\rho_2(b^2 - R_0^2), & b < R_0 < c, \\ 4\pi[\rho_1 a^3 + \rho_2(c^3 - b^3)]/3R_0, & c < R_0 \end{cases}$$

con R_0 distancia de M al centro.

3-a

$$\rho = 5(x^2 + y^2 + z^2)/5$$

3-b

$$m = 5R^5$$

4-

$$u(M) = \begin{cases} 4\pi\mu_0 a, & R_0 < a \\ 4\pi\mu_0 a^2/R_0, & a < R_0, \end{cases}$$

con R_0 distancia de M al centro.

5-

$$w(M) = \nu_0 \left\{ arctg\left[(x-a)/y\right] - arctg\left[(x-b)/y\right] \right\} \qquad a < x < b$$

6-

$$w(M) = \frac{z}{2\pi} \int\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi,\eta)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}} d\xi\, d\eta$$

9-a

$$u(r,\theta) = \frac{u_0}{I_0(ka)} I_0(kr)$$

9-b

$$u(r,\theta) = \frac{u_0}{K_0(ka)} K_0(kr)$$

donde I_0 y K_0 son las funciones cilíndricas de argumento imaginario de orden cero.

10- Función de Green:

$$G(M, M_0) = \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} - \frac{e^{-ikR_1}}{R_1}$$

donde

$$R_0 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

$$R_1 = \sqrt{(x+x_0)^2 + (y+y_0)^2 + (z+z_0)^2}$$

Solución del problema de contorno:

$$u(M_0) = \frac{-z_0}{2\pi} \int\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \frac{e^{-ik\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2]} \cdot$$

$$\left(ik + \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2}} \right) dxdy$$

11- Función de Green:

$$G(M, M_0) = \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} - \frac{e^{-ikR_1}}{R_1}$$

donde

$$R_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

$$R_1 = \sqrt{(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2 + (z + z_0)^2}$$

Solución del problema de contorno:

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, \frac{e^{-ik\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2}} \, dxdy$$

Apéndices

Apéndice A

Integrales impropias

A.1 Integrales impropias en $\mathbb{R}^1$

La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ se llama *impropia* si es de una de las formas que se describen a continuación:

i) $a = -\infty,$ o (y) $b = \infty,$
ii) $f(x)$ no está acotada en al menos un punto x_0, con $a < x_0 < b$.

Para el caso *i)*, si $f(x)$ es integrable en todo intervalo finito $a < x < b$, entonces se definen

$$\begin{aligned} \int_a^\infty f(x)\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx, \\ \int_{-\infty}^b f(x)\,dx &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Cada una de las integrales impropias se dice *convergente* si existe el límite correspondiente y *divergente* si dicho límite no existe.
Así, por ejemplo, la integral

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$$

con $a > 0$, converge si $p > 1$, y diverge si $p \leq 1$.
Para el caso *ii)*, si f no está acotada en x_0, $a < x_0 < b$, se define

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{x_0-\epsilon} f(x)dx \,+\, \lim_{\epsilon\to 0}\int_{x_0+\epsilon}^b f(x)\,dx \tag{A.2}$$

con $\epsilon > 0$, y la integral se dice convergente si ambos límites existen, en caso contrario la integral se dice divergente.
Si $x_0 = a$ desaparece el primer término del segundo miembro y en el caso $x_0 = b$ desaparece el segundo término.

Por ejemplo, las integrales impropias

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}, \tag{A.3}$$

y

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}, \tag{A.4}$$

convergen si $p < 1$ y divergen si $p \geq 1$.
En problemas físicos se utiliza el valor principal de la integral impropia, y se define como

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} f(x)dx \tag{A.5}$$

para el caso *i)*, y

$$v.p. \int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0} \left(\int_a^{x_0-\epsilon} f(x)dx + \int_{x_0+\epsilon}^{b} f(x)dx \right), \tag{A.6}$$

para el caso *ii)*.

Ejemplo 1. La integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} xdx = \lim_{M\to\infty} \int_0^M xdx + \lim_{M\to-\infty} \int_M^0 xdx = \infty$$

es divergente, mientras que

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} xdx = 0.$$

Ejemplo 2. La integral divergente

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^3},$$

verifica

$$v.p. \int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^3} = \frac{3}{8}.$$

Criterios de convergencia

Para integrales de la forma $\int_a^{\infty} f(x)dx$ existen los siguientes criterios de convergencia:

Criterio de comparación

Sean $0 \le f(x) \le g(x)$ para $x \ge a$ entonces si $\int_a^{\infty} g(x)dx$ converge, $\int_a^{\infty} f(x)dx$ también converge, y si $\int_a^{\infty} f(x)dx$ diverge, $\int_a^{\infty} g(x)dx$ diverge.

Criterio del cociente

Sean $f(x), g(x) \ge 0$ para $x \ge a$, y $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = A$.

Si $0 < A < \infty$, entonces $\int_a^{\infty} f(x)dx$ y $\int_a^{\infty} g(x)dx$ ambas convergen o ambas divergen.

Si $A = 0$, y $\int_a^{\infty} g(x)dx$ converge entonces $\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge.

Si $A = \infty$, y $\int_a^{\infty} g(x)dx$ diverge entonces $\int_a^{\infty} f(x)dx$ diverge.

Criterio x^p

Sea $\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = A$. Si A es finito y $p > 1$, $\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge. Si $A \ne 0$ y $p \le 1$, $\int_a^{\infty} f(x)dx$ diverge.

Para integrales de la forma $\int_{\infty}^{b} f(x)dx$ se tienen criterios análogos.

Para las integrales del tipo *ii)* con $f(x)$ no acotada en $x = a$, los criterios de convergencia más utilizados son:

Criterio de comparación

Sean $0 \le f(x) \le g(x)$ para $a \le x \le b$; si $\int_a^b g(x)dx$ converge, entonces $\int_a^b f(x)dx$ converge, y si $\int_a^b f(x)dx$ diverge, entonces $\int_a^b g(x)dx$ diverge.

Criterio del cociente

Sean $f(x), g(x) \ge 0$, para $a \le x \le b$ y $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A$.

Si $0 < A < \infty$, entonces $\int_a^b f(x)dx$ y $\int_a^b g(x)dx$ ambas convergen o ambas divergen.

Si $A = 0$, y $\int_a^b g(x)dx$ converge entonces $\int_a^b f(x)dx$ converge.

Si $A=\infty$, y $\int_a^b g(x)dx$ diverge entonces $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

Criterio x^p

Sea $\lim_{x\to a^+}(x-a)^p f(x)=A$. Si $p<1$ y A es finito, $\int_a^b f(x)dx$ converge.
Si $p\geq 1$ y $A\neq 0$ (puede ser infinito) $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

Convergencia condicional y absoluta

La integral convergente $\int_a^b f(x)dx$ es *absolutamente convergente* si $\int_a^b |f(x)|dx$ converge y es *condicionalmente convergente* si $\int_a^b |f(x)|dx$ diverge.
Toda integral absolutamente convergente es convergente.

Convergencia uniforme

La integral $F(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx$ es *uniformemente convergente* en $[c,d]$ si para $\epsilon>0$ existe $M(\epsilon)$ tal que es $|\int_A^\infty f(x,y)dx|<\epsilon$ para $A>M$ y $\forall y\in[c,d]$.
El *criterio de Weierstrass* establece que si $|f(x,y)|\leq g(x)$ para $x>a$, $c\leq y\leq d$ y $\int_a^\infty g(x)dx$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x,y)dx$ es absoluta y uniformemente convergente en $[c,d]$.

A.2 Integrales impropias en $\mathbb{R}^3$

Se estudiarán las integrales impropias de la forma $\int_T fdV$, donde $f(x,y,z)$ está definida sobre un conjunto acotado $T\subset\mathbb{R}^3$ excepto en un punto M_0 en el cual f no está acotada.
Si U_{ϵ_n} es una sucesión de entornos de M_0 con $diam\, U_{\epsilon_n}<\epsilon_n$, se define

$$\int_T fdV=\lim_{\epsilon_n\to 0}\int_{T-U_{\epsilon_n}} fdV. \tag{A.7}$$

La integral impropia se dice *convergente* si existe el límite y *divergente* si no existe, independientemente de la elección de los U_{ϵ_n}.

Criterios de convergencia

Dado que el límite anterior debe calcularse sobre todas las posibles familias de entornos, no es práctico utilizar la definición sino alguno de los criterios que se dan a continuación.

Convergencia para funciones no negativas

En lo que sigue se llama sucesión monótona a una sucesión U_{ϵ_n} tal que, para $n_2>n_1$ se verifica $U_{\epsilon_{n_2}}\subset U_{\epsilon_{n_1}}$.

Teorema 1 *Si $f\geq 0$ en T y existe el límite (A.7) para una sucesión monótona*

U_{ϵ_n}, entonces existe el límite para cualquier otra sucesión V_{ϵ_n} de diámetro menor que ϵ_n y ambos límites coinciden.

Demostración: Para cualquier V_{ϵ_n} existen $U_{\epsilon_{n_1}}$ y $U_{\epsilon_{n_2}}$ tales que $U_{\epsilon_{n_2}} \subset V_{\epsilon_n} \subset U_{\epsilon_{n_1}}$. De aquí se sigue que

$$\int_{T-U_{\epsilon_{n_2}}} f dV \geq \int_{T-V_{\epsilon_n}} f dV \geq \int_{T-U_{\epsilon_{n_1}}} f dV. \tag{A.8}$$

Dado que existe el límite de los términos de los extremos, es

$$\lim_{\epsilon_n \to 0} \int_{T-U_{\epsilon_n}} f dV = \lim_{\epsilon_n \to 0} \int_{T-V_{\epsilon_n}} f dV = \int_T f dV. \tag{A.9}$$

Si f cambia de signo en la región T, se puede aplicar el teorema anterior a $|f|$ pues si converge la integral del valor absoluto también converge la integral de la función f, como se muestra a continuación.

Teorema 2 *Si $\int_T |f| dV$ converge entonces $\int_T f dV$ converge.*

Demostración: Si se definen

$$f_1(M) = \begin{cases} f(M), & f(M) \geq 0 \\ 0, & f(M) < 0, \end{cases} \tag{A.10}$$

y

$$f_2(M) = \begin{cases} 0, & f(M) \geq 0 \\ -f(M), & f(M) < 0, \end{cases} \tag{A.11}$$

entonces es $f = f_1 - f_2$, f_1 y f_2 son no negativas y $f_1, f_2 \leq |f|$.
Para una sucesión monótona U_{ϵ_n} se tiene

$$\int_{T-U_{\epsilon_n}} f_i dV \;\leq\; \int_{T-U_{\epsilon_n}} |f| dV \;\leq\; \int_T |f| dV, \quad i = 1, 2, \tag{A.12}$$

el término de la izquierda define una suceción monótona creciente y acotada, por lo tanto posee límite. Entonces,

$$\int_T f dV = \int_T f_1 dV - \int_T f_2 dV, \tag{A.13}$$

converge.

Lema *La integral $\int_T dV/R^\alpha$ converge si $\alpha < 3$ y diverge si $\alpha \geq 3$, con $R^2 = (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2$ y $M_0(x_0, y_0, z_0) \in T$.*

Demostración: Sin pérdida de generalidad se puede considerar que T es una esfera de centro M_0 y radio R_0. Entonces tomando esferas K_{ϵ_n} de centro M_0

y radio ϵ_n, se tiene

$$\int_{T-K_{\epsilon_n}} \frac{dV}{R^\alpha} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_{\epsilon_n}^{R_0} \frac{dR}{R^{\alpha-2}} = \begin{cases} 4\pi \frac{R^{3-\alpha}}{3-\alpha} \rfloor_{\epsilon_n}^{R_0}, & \alpha \neq 3 \\ 4\pi ln(R) \rfloor_{\epsilon_n}^{R_0}, & \alpha = 3. \end{cases} \tag{A.14}$$

De aquí se obtiene la convergencia o divergencia tomando el límite para $\epsilon \to 0$. El resultado anterior depende de la dimensión del espacio; para dos variables independientes, con $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ y $M_0(x_0, y_0) \in A$, la integral $\int_A dS/r^\alpha$, converge si $\alpha < 2$ y diverge si $\alpha \geq 2$.

Criterio de comparación

Sea $|f| \leq g$, si $\int_T gdV$ converge, $\int_T fdV$ converge.

Demostración: Dada la sucesión monótona de entornos de M_0, U_{ϵ_n}, se tiene

$$\int_{T-U_{\epsilon_n}} |f| dV \ \leq \ \int_{T-U_{\epsilon_n}} gdV \ \leq \ \int_T gdV, \tag{A.15}$$

el término de la izquierda define una sucesión monótona creciente que está acotada por el término de la derecha, por lo tanto tiene límite.
Aplicando el teorema 2 se obtiene la convergencia de $\int_T fdV$.

Para la divergencia se verifica que si $f > g > 0$ y $\int_T gdV$ diverge entonces $\int_T fdV$ diverge.

A.3 Integrales impropias dependientes de un parámetro

Sea la integral impropia

$$F(M) = \int_T f(M, P)\, dV_P, \tag{A.16}$$

con $f(M, P)$ continua respecto de M y de P para $M \neq P$, y no acotada para $M = P$. La integral $F(M)$ es *uniformemente convergente* en $M_0 \in T$ si dado $\epsilon > 0$ existe un entorno U de M_0 contenido en T, y tal que

$$\left| \int_U f(M, P) dV_P \right| \ < \ \epsilon,$$

$\forall M \in U$.

Teorema 3 *Si $F(M) = \int_T f(M, P)\, dV_P$ converge uniformemente en $M_0 \in T$, entonces F es continua en M_0.*

Demostración: Dado $\epsilon > 0$ se debe hallar $\delta(\epsilon)$ tal que $|F(M) - F(M_0)| < \epsilon$ para $|M - M_0| < \delta$.

Se considera un entorno U de M_0, $U \subset T$ y $T = T_1 + T_2$, con $T_1 = U$, $T_2 = T - U$. Sean

$$F_i(M) = \int_{T_i} f(M,P) dV_P, \qquad i = 1, 2. \tag{A.17}$$

De donde

$$|F(M) - F(M_0)| \ \leq \ |F_1(M)| \ + \ |F_1(M_0)| \ + \ |F_2(M) - F_2(M_0)|. \tag{A.18}$$

Por la continuidad uniforme de F en M_0, para $\epsilon/3$ existe U tal que $diam\, U = \delta_1$ y

$$|F_1(M)|, \ \ |F_1(M_0)| \ < \ \frac{\epsilon}{3} \tag{A.19}$$

para $M \in U$.
Dado que $M_0 \in T_1$, F_2 es continua en M_0 por lo cual

$$|F_2(M) - F_2(M_0)| \ < \ \frac{\epsilon}{3} \tag{A.20}$$

para $|M - M_0| < \delta_2$.
Si

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2), \tag{A.21}$$

entonces

$$|F(M) - F(M_0)| \ < \ \epsilon, \tag{A.22}$$

para $|M - M_0| \ < \ \delta$.

Nota: Los resultados obtenidos son válidos también para integrales de superficie y de línea.

Apéndice B

Serie y transformada de Fourier

B.1 Funciones ortogonales

Sea $g_n(x)$ una función definida en el intervalo $a \leq x \leq b$; se denomina *norma* de la función g_n al número $||g_n||$ tal que

$$||g_n||^2 = \int_a^b |g_n(x)|^2 dx.$$

Dadas las funciones $g_n(x)$ y $g_m(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$, se define su *producto interno* como el número (g_n, g_m) tal que

$$(g_n, g_m) = \int_a^b g_n(x)\overline{g}_m(x) dx,$$

donde $\overline{g}_m$ indica al complejo conjugado de g_m.
De ambas definiciones resulta que

$$||g_n||^2 = (g_n, g_n).$$

Un conjunto $\{g_n\}$, $n = 1, 2, 3, ...,$ es *ortogonal* si $g_n \neq 0$ $\forall n$, y $(g_n, g_m) = 0$ para $n \neq m$.
Un conjunto $\{g_n\}$, $n = 1, 2, 3, ...,$ es *ortonormal* si es ortogonal y $||g_n|| = 1$ $\forall n$.
Si $\{g_n\}$ es ortogonal, $\{g_n/||g_n||\}$ es ortonormal.

Ejemplos de conjuntos ortogonales en el intervalo $(-l, l)$ son

$$\{\sin(n\pi x/l)\}, \{\cos(n\pi x/l)\}, \qquad n = 0, 1, 2...,$$

y a partir de ellos se obtienen los correspondientes conjuntos ortonormales

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right\},\left\{\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right\}, \qquad n = 0,1,2...,$$

En el campo complejo el conjunto

$$\{\exp\left(in\pi x/(b-a)\right)\}, \qquad n = 0,1,2...,$$

es ortogonal en (a,b), y normalizado resulta

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{b-a}}\exp\left(\frac{in\pi x}{b-a}\right)\right\}, \qquad n = 0,1,2...$$

B.2 Series de Fourier

Dada la función $f(x)$ definida en el intervalo $(-\pi,\pi)$, la *serie de Fourier* asociada a ella es la serie trigonométrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

con $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$, y $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$, $n = 0,1,2,\ldots$.
Los coeficientes a_n, b_n se llaman *coeficientes de Fourier*, y se dice que la serie trigonométrica representa a $f(x)$ en $(-\pi,\pi)$ si ambas coinciden en $(-\pi,\pi)$ salvo en un número finito de puntos.
Para definir la serie de Fourier se ha utilizado el conjunto de funciones ortogonales

$$\{\sin nx, \cos nx\}, \qquad n = 1,2,...$$

El término constante de la serie es el valor medio de f en $(-\pi,\pi)$.
Cada término de la serie trigonométrica es una función periódica de período 2π, por lo tanto si la serie converge a $f(x)$, ésta debe ser una función periódica de período 2π, que es una extensión periódica de f a todo $\mathbb{R}$.
Las *condiciones suficientes* para que la serie de Fourier asociada a f represente a esta función,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

están detalladas en el teorema de Fourier que se enuncia a continuación.

Teorema 1 *Sea $f(x)$ una función seccionalmente continua en el intervalo $(-\pi,\pi)$, entonces*

$$\frac{1}{2}\{f(x^+) + f(x^-)\} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \qquad \text{(B.1)}$$

con

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{B.2}$$

donde con $f(x^+)$ *y* $f(x^-)$ *se han indicado, respectivamente, los límites por derecha e izquierda en el punto* x.

Ejemplo 1. La serie de Fourier correspondiente a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi, \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \pi \end{cases},$$

es

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos[(2n+1)x]}{(2n+1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{n}\right).$$

A partir de ella se pueden sumar series numéricas, por ejemplo, si consideramos sucesivamente $x = 0$ y $x = \pi/2$, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi}{4},$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{2},$$

teniendo en cuenta que en los puntos de discontinuidad la serie converge a $1/2$ y a $f(x)$ donde es continua.

Serie de Fourier de senos y cosenos

A partir de la definición de los coeficientes de Fourier, se comprueba que si $f(x)$ es una función impar, es decir, $f(-x) = -f(x)$, es

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\, dx. \tag{B.3}$$

Si f es una función par, esto es, $f(-x) = f(x)$, entonces

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\, dx, \quad b_n = 0. \tag{B.4}$$

De aquí que una función impar tenga como desarrollo en serie de Fourier a una *serie de senos*,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(nx), \tag{B.5}$$

con los coeficientes b_n dados por (B.3).
Una función par se representa por una *serie de cosenos*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nx), \tag{B.6}$$

con los coeficientes a_n dados por (B.4).
El desarrollo (B.5) puede interpretarse como la prolongación impar en $(-\pi, \pi)$ de una función definida en $(0, \pi)$, y el desarrollo (B.6) como la prolongación par en $(-\pi, \pi)$ de la misma función.

Ejemplo 2. La serie de senos para la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \leq x < \pi \end{cases},$$

es

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin[(2n+1)x] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} \sin(2nx).$$

Esta serie representa a la prolongación impar y periódica de período 2π de la $f(x)$ dada.
La misma función f tiene el desarrollo en serie de cosenos

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \quad & \{f(x^+) + f(x^-)\} = \frac{\pi}{8} + \\ + \quad & \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \{[(-1)^n (2n+1)\pi - 2] cos[(2n+1)x] - cos[(4n+2)x]\}, \end{aligned}$$

que representa a la prolongación par y periódica de período 2π de $f(x)$.

Forma compleja de la serie de Fourier

En algunos casos conviene desarrollar la función $f(x)$, definida en el intervalo (a, b), tomando como base al conjunto ortogonal $\{exp(i2\pi n/(b-a))\}$, es decir

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \, exp\left(\frac{i2\pi n}{b-a}\right), \tag{B.7}$$

donde

$$c_n = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) \, exp\left(-\frac{i2\pi n}{b-a}\right) \, dx. \tag{B.8}$$

Los coeficientes se han obtenido realizando el producto interno de f con cada función $exp(-i2\pi m/(b-a))$, para $m = 0, \pm 1, \pm 2, ..$, y bajo la suposición que la

serie (B7) puede integrarse término a término. Las condiciones suficientes de existencia de un desarrollo en serie compleja de Fourier son las mismas que las enunciadas en el teorema para el desarrollo en serie trigonométrica. Por lo tanto, la serie (B.7) converge a $\{f(x^+) + f(x^-)\}/2$.

Ejemplo 3. El desarrollo en serie compleja de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

es

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{i}{4n} e^{-i2nx} - \frac{[2 + (2n+1)\pi i]}{2\pi(2n+1)^2} e^{i(2n+1)x} \right\}.$$

Forma general de la serie de Fourier

El desarrollo en serie trigonométrica de Fourier de una función definida en un intervalo (a, b) se obtiene explicitando la exponencial que aparece en (B.7)

$$\begin{aligned} f(x) &\sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(c_n + c_{-n}) \cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) + i(c_n - c_{-n}) \sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) \right], \end{aligned} \quad \text{(B.9)}$$

con coeficientes

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} = \frac{2}{(b-a)} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right), \\ b_n &= c_n - c_{-n} = \frac{2}{(b-a)} \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right), \quad n = 1, 2, 3... \end{aligned} \quad \text{(B.10)}$$

Ejemplo 4. La serie de Fourier de la función $f(x) = x$, $a < x < b$ es la función periódica de período $(b - a)$:

$$\frac{(b+a)}{2} - \frac{(b-a)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \, sen\left(\frac{2\pi n(x-a)}{b-a}\right) =$$

$$\begin{cases} x & a < x < b \\ (b+a)/2 & x = kb - (k-1)a, \quad k = 0, \pm 1, ... \end{cases}.$$

Derivación de una serie de Fourier

En general, la derivación término a término de la serie de Fourier de f no representa a f', como lo muestra el siguiente ejemplo. Derivando término a término la serie

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} sen(nx), \qquad -\pi < x < \pi,$$

se obtiene

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} cos(nx),$$

que es una serie divergente, ya que $lim_{n\to\infty} cos(nx) \neq 0$.
Es importante, entonces, tener en cuenta condiciones suficientes para que la serie de las derivadas sea la derivada de la serie.

Teorema 2 *Sea $f(x)$ continua en (a, b), $f(a) = f(b)$ y $f'(x)$ seccionalmente continua en (a, b). Si*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\right], \qquad a < x < b, \quad \text{(B.11)}$$

y si existe $f'(x)$, entonces

$$f'(x) = \frac{2\pi}{(b-a)} \sum_{n=1}^{\infty} n \left[b_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) - a_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\right], \qquad a < x < b. \quad \text{(B.12)}$$

Integración de una serie de Fourier

La serie de Fourier de f puede integrarse término a término en condiciones muy amplias para obtener la integral de f.

Teorema 3 *La serie de Fourier de f (aún no siendo convergente), puede integrarse término a término y converge a la integral de f. Es decir, si la serie de Fourier asociada a f es*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) + b_n sen\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\right], \qquad a < x < b, \qquad \text{(B.13)}$$

entonces

$$\int_a^x f(x)\, dx \quad = \quad \frac{a_0(b-a)}{4} + \frac{(b-a)}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \{ \frac{a_n}{n} \left[\sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) - \sin\left(\frac{2\pi na}{b-a}\right)\right]$$

$$- \quad \frac{b_n}{n}\left[\cos\left(\frac{2\pi n x}{b-a}\right) - \cos\left(\frac{2\pi n a}{b-a}\right)\right] - \frac{a_0}{n}\sin\left(\frac{2\pi n(x-a)}{b-a}\right)\},$$

$$a < x < b.$$

Este resultado se ha obtenido integrando la serie de Fourier asociada a f entre a y x y reemplazando luego x por su desarrollo en serie en (a, b) dado en el ejemplo anterior.

B.3 Transformada de Fourier

La transformada de Fourier es una herramienta importante para la resolución de EDP.
Se analizan aquí las transformadas en una y en dos dimensiones. Para el caso de n dimensiones, las generalizaciones resultan inmediatas.

Transformada de Fourier unidimensional

La *transformada de Fourier* de $f(x)$ es la función definida por

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-i2\pi xu)dx \;=\; F(u) \;=\; \mathcal{F}\{f\}(u), \qquad \text{(B.14)}$$

con x y u variables reales y donde $f(x)$ puede ser compleja.
De (B.14) se demuestra que la transformada inversa de F es

$$\mathcal{F}^{-1}\{F\}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\exp(i2\pi xu)du = f(x). \qquad \text{(B.15)}$$

Expresiones alternativas para (B.14) y (B.15) son

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f\}(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-ixu)dx \;=\; F(u), \\ \mathcal{F}^{-1}\{F\}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\exp(ixu)du = f(x). \end{aligned} \qquad \text{(B.16)}$$

Condiciones suficientes para la existencia de la transformada se dan en el teorema que sigue. Sin embargo, hay que hacer notar que gran cantidad de funciones que no satisfacen las hipótesis del teorema 4, poseen transformada.

Teorema 4 *Si f verifica las condiciones siguientes:*

$i)$ *es absolutamente integrable, es decir,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty,$$

$ii)$ tiene un número finito de discontinuidades y un número finito de máximos y mínimos en todo intervalo finito,
$iii)$ no tiene discontinuidades infinitas,

entonces existe la transformada de Fourier de f.

Ejemplo 5. La transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1/a, & |x| < a/2 \\ 0, & |x| > a/2, \end{cases}$$

es $F(u) = \sin(\pi a u)/(\pi a u) = sinc(\pi a u)$, donde con $sinc$ se denota a la función seno cardinal.

Transformada de Fourier de la derivada de una función

Teorema 5 *Si $\mathcal{F}\{f\} = F$, entonces*

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^r f}{dx^r}\right\} = (2\pi i u)^r F(u) \tag{B.17}$$

si las $(r-1)$ primeras derivadas de f se anulan para $x \to \pm\infty$.

Transformada de Fourier bidimensional

La *transformada de Fourier* de $f(x,y)$ es

$$\frac{1}{4\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp[-2\pi i(xu+yv)]\,dxdy = F(u,v) = \mathcal{F}\{f\}(u,v), \tag{B.18}$$

donde f puede ser una función a valores complejos.
La transformada inversa de la función F es

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)\exp[2\pi i(xu+yv)]\,dudv = f(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\{F\}(x,y). \tag{B.19}$$

Las condiciones de existencia de la transformada bidimensional son análogas a las citadas para la transformada unidimensional.
Expresiones alternativas para (B.18) y (B.19) son

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f\}(u,v) &= \frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp[-i(xu+yv)]dxdy = F(u,v), \\ \mathcal{F}^{-1}\{F\}(u,v) &= \frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)\exp[i(xu+yv)]dudv = f(x,y). \end{aligned} \tag{B.20}$$

Ejemplo 6. La transformada de Fourier de

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{ab}, & |x| < a/2,\ |y| < b/2 \\ \\ 0, & |x| > a/2, |y| > b/2 \end{cases}$$

es $F(u,v) = senc(\pi au)\ senc(\pi bv)$.

A continuación se enumeran propiedades de la transformada que se derivan de propiedades de la integración.

$i)$ **Linealidad**

$$\mathcal{F}\{af + bg\} = a\mathcal{F}\{f\} + b\mathcal{F}\{g\},$$

con a y b constantes.

$ii)$ **Dilatación** Si $\mathcal{F}\{f\} = F$, entonces

$$\mathcal{F}\{f(ax, by)\} = \frac{1}{|ab|}\mathcal{F}\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right),$$

con a, b constantes.

$iii)$ **Translación** Si $\mathcal{F}\{f\} = F$ entonces

- $\mathcal{F}\{f(x-a, y-b)\}(u,v) = F(u,v)exp[-2\pi i(au + bv)]$
- $\mathcal{F}\{f(x,y)\ \exp[2\pi i(ax + by)]\}(u,v) = F(u-a, v-b)$.

Convolución

La *convolución* de $f(x,y)$ con $g(x,y)$ se anota $f * g$, y se define por

$$(f * g)(x,y) = \int\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)g(x-u, y-v)\ dudv. \qquad \text{(B.21)}$$

De la definición sigue que $f * g = g * f$.

Teorema de convolución. Si existen las transformadas de Fourier de f y de g, entonces

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\}\mathcal{F}\{g\}. \qquad \text{(B.22)}$$

Como corolario de este teorema se obtiene el resultado siguiente:

$$\mathcal{F}\{fg\} = \mathcal{F}\{f\} * \mathcal{F}\{g\}. \qquad \text{(B.23)}$$

B.4 Transformada de Hankel

Para una función que posee simetría cilíndrica

$$f(x,y) = g(r), \tag{B.24}$$

y cuya transformada de Fourier bidimensional es

$$F(u,v) = \int\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)exp[-2\pi i(xu+yv)]\, dxdy, \tag{B.25}$$

al introducir coordenadas polares en ambos dominios,

$$\begin{array}{rcll} x & = & r\,\cos\theta & u = \rho\,\cos\phi, \\ y & = & r\,\sin\theta & v = \rho\,\sin\phi, \end{array}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} F(u,v) &= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} g(r)\exp[-2\pi i r\rho\cos(\theta-\phi)]\, rdr \\ &= G(\rho) = 2\pi\int_0^{\infty} g(r)J_0(2\pi r\rho)\, rdr, \end{aligned} \tag{B.26}$$

pues $J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(-ix\cos\alpha)\,d\alpha$ (ver ecuación (E.27)).
Como también es $J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} exp(ix\cos\alpha)d\alpha$, se tiene que

$$g(r) = 2\pi\int_0^{\infty} G(\rho)J_0(2\pi r\rho)\rho d\rho. \tag{B.27}$$

La expresión (B.26) es la *transformada de Hankel* de g(r), también conocida como *transformada de Fourier-Bessel*. La transformada inversa tiene la misma forma, como lo muestra la ecuación (B.27).

Apéndice C

Principio de superposición. Método de separación de variables

C.1 Principio de superposición

Las EDP lineales homogéneas pueden definirse por medio de un operador diferencial lineal. Así, por ejemplo, la ecuación hiperbólica

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \tag{C.1}$$

puede escribirse como $L(u) = 0$, con $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.
La ecuación elíptica

$$u_{xx} + u_{yy} = a(x, y)u \tag{C.2}$$

es $L(u) = 0$, con $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - a(x, y)$.

Un operador L es lineal si verifica

$$\begin{aligned} L(u+v) &= L(u) + L(v), \\ L(cu) &= cL(u), \qquad c = constante. \end{aligned} \tag{C.3}$$

Por lo tanto, la combinación lineal de soluciones de una ED lineal homogénea, es también solución. Este resultado puede generalizarse para obtener el *principio de superposición* que se enuncia en el teorema siguiente.

Teorema 1 *Sean $u_i(x_1, ..., x_n)$, $i = 1, 2, 3....$, soluciones de la ED lineal homogénea $L(u) = 0$, entonces la serie $u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$ es también solución de la ecuación si para toda derivada $\partial^m u/\partial x_j^m$ que forma parte de L, se verifica $\partial^m u/\partial x_j^m = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \partial^m u_i/\partial x_j^m$.*

La afirmación del teorema se deduce inmediatamente de la linealidad de la ED homogénea y de la propiedad de derivación término a término,

$$L(u) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i L(u_i) = 0. \tag{C.4}$$

Una condición suficiente para que la serie de las derivadas converja a la derivada de la serie es la convergencia uniforme de la serie derivada (C4). Se puede trabajar bajo esta hipótesis.

C.2 Separación de variables

En este apartado se analiza el método de separación de variables para EDP homogéneas de los tres tipos fundamentales estudiados en el capítulo **2**, para dos variables independientes. Consideraremos EDP que representan una gran cantidad de problemas físicos, y que se definen por medio del operador lineal

$$L = -\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial}{\partial x}\right) + b(x), \tag{C.5}$$

con $a(x) > 0$ y $b(x) \geq 0$.

Región espacial acotada

Para el caso hiperbólico se tiene

$$f(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \,+\, L(u) = 0, \qquad 0 < x < l, \;\; t > 0, \tag{C.6}$$

con $f(x) > 0$ en $0 < x < l$, condiciones homogéneas de frontera

$$\begin{aligned} \alpha_1\, u(0,t) - \beta_1\, u_x(0,t) &= 0, \\ \alpha_2\, u(l,t) + \beta_2\, u_x(l,t) &= 0 \end{aligned} \tag{C.7}$$

para $t > 0$, y condiciones iniciales

$$u(x,0) = \phi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x), \qquad 0 < x < l. \tag{C.8}$$

Para el caso parabólico la ecuación es

$$f(x)\,\frac{\partial u}{\partial t} \,+\, L(u) = 0, \qquad 0 < x < l, \;\; t > 0, \tag{C.9}$$

con las condiciones de frontera (C.7) y la condición inicial

$$u(x,0) = \phi(x), \qquad 0 < x < l. \tag{C.10}$$

En el caso elíptico la ecuación es

$$f(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \,-\, L(u) = 0; \qquad 0 < x < l, \;\; 0 < y < \bar{l}, \tag{C.11}$$

con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \alpha_1\, u(0,y) - \beta_1\, u_x(0,y) &= 0 \\ \alpha_2\, u(l,y) + \beta_2\, u_x(l,y) &= 0 \end{aligned} \tag{C.12}$$

para $0 < y < \bar{l}$, y

$$u(x,0) = \phi(x), \qquad u(x,\bar{l}) = \psi(x), \qquad 0 < x < l. \tag{C.13}$$

Si se propone como solución de (C.6) y (C.9)

$$u(x,t) = X(x)\, T(t), \tag{C.14}$$

y como solución de (C.11),

$$u(x,y) = X(x)\, Y(y), \tag{C.15}$$

excluyendo las soluciones triviales $X(x) = 0$, $T(t) = 0$, e $Y(y) = 0$ resultan

$$\begin{aligned} \frac{T''}{T} &= \frac{1}{Xf}\,\frac{\partial}{\partial x}(aX') - \frac{b}{f} = -\lambda, \\ \frac{T'}{T} &= \frac{1}{Xf}\,\frac{\partial}{\partial x}(aX') - \frac{b}{f} = -\lambda, \\ \frac{Y''}{Y} &= -\frac{1}{Xf}\,\frac{\partial}{\partial x}(aX') + \frac{b}{f} = \lambda, \end{aligned} \tag{C.16}$$

con λ constante pues los dos primeros términos de cada ecuación dependen de distintas variables independientes.

De estas ecuaciones se obtiene para X

$$L(X) = -\frac{d}{dx}(aX') + bX = \lambda f X, \qquad 0 < x < l, \tag{C.17}$$

con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \alpha_1 X(0) - \beta_1 X'(0) &= 0, \\ \alpha_2 X(l) + \beta_2 X'(l) &= 0. \end{aligned} \tag{C.18}$$

El problema (C.17), (C.18) se conoce como el *problema de Sturm-Liouville*. Se pide que f, a y b sean no negativas y continuas en $0 \leq x \leq l$ y que $\alpha_i, \beta_i \geq 0$, y $\alpha_i + \beta_i > 0$ para $i = 1, 2$.

La función $X = 0$ es solución de este problema, pero conduce a la solución trivial $u = 0$, que no interesa. Se trata, entonces, de hallar valores de λ para los cuales existe solución X no trivial; a estos valores de λ se los llama *autovalores* y a las correspondientes soluciones X *autofunciones*. El conjunto de autovalores se denomina *espectro*.

Los autovalores y las autofunciones verifican las siguientes propiedades:

$i)$ Existe un conjunto infinito numerable de autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...$, por lo que el espectro es *discreto*.

$ii)$ Las autofunciones correspondientes a distintos autovalores son ortogonales en el intervalo $0 < x < l$, y forman un conjunto completo.

$iii)$ Los autovalores son reales y no negativos y las autofunciones se pueden elegir como funciones reales.
Con estos resultados, toda función u de cuadrado integrable en $0 < x < l$ posee un desarrollo en serie de autofunciones

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x), \tag{C.19}$$

con $a_n = \frac{1}{||X_n||^2} \int_0^l u(x) X_n(x) dx$.
Además, si u y su derivada son seccionalmente continuas en $0 < x < l$, y u satisface las condiciones de frontera (C.7), entonces la serie (C.19) converge absoluta y uniformemente en $0 \leq x \leq l$, salvo en los puntos de discontinuidad x_k, en los cuales la serie converge a $\{u(x_k^+) + u(x_k^-)\}/2$.
El cálculo de autovalores y autofunciones quedará en claro en los numerosos problemas considerados, lo mismo que el análisis de la solución (C.14) o (C.15) donde las soluciones para T o Y se obtienen de las ecuaciones (C.16).

Región espacial no acotada

Cuando la región espacial es no acotada, también puede aplicarse el método de separación de variables. En este caso el espectro obtenido es *continuo*, el conjunto de autovalores es denso. Se obtienen soluciones de la forma

$$u(x, t, \lambda) = X(x, \lambda)\, T(t, \lambda), \tag{C.20}$$

con $\lambda \in D$.
Por lo cual se propone una solución por superposición "continua"

$$u(x, t) = \int_D X(x; \lambda) T(t; \lambda) d\lambda. \tag{C.21}$$

Se hace lo mismo cuando $u = u(x, y)$.
En los problemas se verá que la integral (C.21) define una transformada (Fourier, Bessel, Laplace, etc.).

El método de separación de variables sugiere que para regiones espaciales acotadas pueda directamente proponerse una solución en forma de serie y para regiones no acotadas, en forma de integral. Para ello hay que tener, al menos, la sospecha de cuál es el sistema de funciones ortogonales (autofunciones) relativo al problema espacial acotado, o cuál es el núcleo de la integral (transformada) asociada al problema espacial no acotado. Generalmente, la naturaleza del problema hace bastante cierta esta sospecha.

Apéndice D

Transformada de Laplace

D.1 Definición y propiedades de la transformada de Laplace

Dada una función $f(t)$ definida $\forall t > 0$, se llama *transformada de Laplace* de $f(t)$ y se anota $\mathcal{L}\{f\}$, a la función $F(s)$,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt. \tag{D.1}$$

La transformada $F(s)$ existe si la integral converge en s.
La función original $f(t)$ se denomina *transformada inversa* o *inversa de* $F(s)$ y se anota $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$, es decir

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F\}. \tag{D.2}$$

Ejemplos:

- $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ para $s > 0$.
- $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$ para $s - a > 0$.
- Si $f(t) = t^a$ con $a > 0$ es $\mathcal{L}\{t^a\} = \int_0^\infty e^{-st} t^a dt$; haciendo $st = x$ es $\mathcal{L}\{t^a\} = \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^\infty e^{-x} x^a dx = \Gamma(a+1)/s^{a+1}$, ($s > 0$) donde se ha introducido la función gamma, Γ.

Se dice que una función $f(t)$ es *seccionalmente continua* sobre un intervalo $a \leq t \leq b$, si el intervalo puede subdividirse en un número finito de subintervalos en cada uno de los cuales $f(t)$ es continua y tiene límites finitos a derecha

e izquierda.

Teorema de existencia de la Transformada de Laplace

Sea $f(t)$ una función seccionalmente continua sobre cada subintervalo finito de $t \geq 0$ y que satisface

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \qquad t \geq N \tag{D.3}$$

para algunas constantes M, N y α.
Entonces la transformada de Laplace de $f(t)$ *existe* $\forall s > \alpha$.

Observación: Este teorema establece *condiciones suficientes* pero no necesarias para la existencia de la transformada. En efecto, la función $1/\sqrt{t}$ tiende a infinito cuando t tiende a 0, y sin embargo, su trannsformada de Laplace existe y es

$$\mathcal{L}\{t^{-\frac{1}{2}}\} = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

Unicidad de la Transformada de Laplace

Si la transformada de Laplace existe, es *única*.
Inversamente, puede demostrarse que dos funciones que tienen la misma transformada, no pueden diferir más que en puntos aislados.

Linealidad

La transformada de Laplace es un *operador lineal*, es decir, para funciones $f(t)$ y $g(t)$ cuyas transformadas de Laplace existen, y para constantes cualesquiera, a y b, se tiene que

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}. \tag{D.4}$$

Utilizando la linealidad se obtienen

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cosh(at)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right\} = \frac{s}{s^2 - a^2}, \\
\mathcal{L}\{sh(at)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right\} = \frac{a}{s^2 - a^2}, \\
\mathcal{L}\{\cos(at)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}\right\} = \frac{s}{s^2 + a^2}, \\
\mathcal{L}\{\sin(at)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}\right\} = \frac{a}{s^2 + a^2}.
\end{aligned}$$

Primer teorema de traslación

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ cuando $s > \alpha$, entonces

$$\mathcal{L}\{e^{at}\, f(t)\} = F(s-a), \qquad s > a + \alpha. \tag{D.5}$$

Por medio del primer teorema de traslación se obtienen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at}\, t^n\} &= \frac{\Gamma(n+1)}{(s-a)^{n+1}} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \\ \mathcal{L}\{e^{at}\, \cos bt\} &= \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Segundo teorema de traslación

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, entonces para cualquier constante $a > 0$

$$\mathcal{L}\{u_a(t) f(t-a)\} = e^{-as} F(s), \tag{D.6}$$

donde $u_a(t)$ es la *función salto unidad* o *función de Heaviside en* a, definida por

$$u_a(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a. \end{cases} \tag{D.7}$$

Aplicando el segundo teorema de traslación, la transformada de Laplace de

$$f(t) = u_{\pi/2}(t) \cos t = -u_{\pi/2}(t) \sin{(t - \pi/2)}$$

es

$$F(s) = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}.$$

Convolución

Teorema 1 *Sean $f(t)$ y $g(t)$ funciones definidas para $t > 0$, la convolución entre f y g es una función de t que se anota $f * g$ y se define por*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\mu) g(t-\mu) d\mu. \tag{D.8}$$

La convolución posee las propiedades siguientes:

- $f * g = g * f$

- $f * (g + h) = f * g + f * h$
- $(f * g) * h = f * (g * h)$

Teorema 2 *Si $F(s)$ y $G(s)$ son las transformadas de Laplace de $f(t)$ y $g(t)$ respectivamente, entonces la transformada de Laplace de la convolución de $f(t)$ y $g(t)$ verifica:*

$$\mathcal{L}\{f * g\} = F(s)G(s). \tag{D.9}$$

Transformada de Laplace de la integral de una función

Si $f(t)$ satisface las condiciones del teorema de existencia de la transformada, entonces

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\{1 * f\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f\}, \qquad s > 0, \quad s > \alpha. \tag{D.10}$$

Por aplicación reiterada del anterior resultado puede obtenerse $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+w^2)}\right\}$ pues

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + w^2}\right\} = \frac{1}{w}\sin wt,$$

y por lo tanto es

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 + w^2)}\right\} = \frac{1}{w}\int_0^t \sin w\tau d\tau = \frac{1}{w^2}(1 - \cos wt),$$

y

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2 + w^2)}\right\} = \frac{1}{w^2}\int_0^t (1 - \cos w\tau)d\tau = \frac{1}{w^2}\left(t - \frac{\sin wt}{w}\right).$$

Transformada de Laplace de la derivada de orden n

Sean $f(t)$ y sus derivadas $f'(t), ..., f^{(n-1)}(t)$ funciones continuas para $t \geq 0$ que satisfacen (D.3).
Entonces la transformada de Laplace de $f^{(n)}(t)$ existe para $s \geq \alpha$ y está dada por

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f\} - s^{n-1}f(0) - ... - f^{(n-1)}(0). \tag{D.11}$$

Con este resultado se calculan las siguientes transformadas:

- Si $f(t) = \sin^2 t$, entonces es $f(0) = 0$ y $f'(t) = 2\sin t \cos t = \sin 2t$. Luego,

$$\mathcal{L}\{f^{'}(t)\} = \mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4} = s\mathcal{L}\{f\},$$

  y es

$$\mathcal{L}\{\sin^2 t\} = \frac{2}{s(s^2+4)}.$$

- Si $f(t) = t\sin t$ es

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sin t + t\cos t, \\ f''(t) &= 2\cos t - t\sin t, \end{aligned}$$

  y $f'(0) = f''(0) = 0$.

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = 2\mathcal{L}\{\cos t\} - \mathcal{L}\{f(t)\} = s^2 L\{f(t)\},$$

  de modo que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t\sin t\} = \frac{2\mathcal{L}\{\cos t\}}{s^2+1} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}. \qquad \text{(D.12)}$$

Derivada de la Transformada

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s). \qquad \text{(D.13)}$$

Puede obtenerse la antitransformada de $F(s) = \ln\{(s+a)/(s-a)\}$ calculando

$$\frac{-2a}{(s+a)(s-a)} = \frac{-2a}{s^2-a^2} = -2\mathcal{L}\{sh(at)\},$$

luego es $f(t) = 2sh(at)/t$.

Apéndice E

Funciones especiales

Al aplicar el método de separación de variables para resolver una EDP se obtienen, en general, EDO. De entre las EDO con coeficientes variables más conocidas, estudiaremos aquí sólo aqéllas que se utilizan en el texto. Sus soluciones, llamadas *funciones especiales*, y todas sus propiedades pueden consultarse, por ejemplo, en la tabla de Gradshteyn & Ryzhik (2000).

E.1 Ecuaciones diferenciales asociadas a funciones especiales

Las ecuaciones diferenciales que analizaremos son, la *ecuación de Bessel de orden* ν

$$(x\, y')' + (x - \frac{\nu^2}{x})y = 0, \qquad x > 0, \tag{E.1}$$

la *ecuación de Legendre*

$$[(1-x^2)\, y']' + \lambda y = 0, \qquad |x| < 1, \tag{E.2}$$

y la *ecuación adjunta de Legendre*

$$\left[(1-x^2)\, y'\right]' + \left[\lambda - \frac{m^2}{(1-x^2)}\right] y = 0, \quad |x| < 1. \tag{E.3}$$

Todas estas ecuaciones tienen la forma

$$L(y) = [g(x)\, y']' - q(x)y = 0, \tag{E.4}$$

con $g(x) > 0$ para $a < x < b$, y $g(x) = 0$ en $x = a$ o en $x = b$.

Los lemas 1 y 2 que presentamos a continuación establecen el comportamiento de las soluciones de (E.4) en un entorno de uno de los extremos del intervalo

respectivo.

Lema 1 *Dada la ecuación (E.4) con* $g(x) = (x-a)\phi(x)$, $\phi(a) \neq 0$ *y* ϕ *continua, si* $y_1(x), y_2(x)$ *son soluciones linealmente independientes y además* $|y_1(a)| < \infty$, *entonces* $\lim_{x\to a} y_2(x) = \pm\infty$.
Demostración: De la igualdad

$$y_2 L(y_1) - y_1 L(y_2) = [g\,(y_2 y_1' - y_1 y_2')]' = 0, \tag{E.5}$$

se deduce que el Wronskiano de y_1, y_2 es

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = \frac{c}{g}, \tag{E.6}$$

con $c \neq 0$ pues y_1 e y_2 son linealmente independientes.
De la relación anterior resulta

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{c}{g y_1^2}, \tag{E.7}$$

e integrando es

$$y_2(x) = y_1(x)\left(\int_{x_0}^{x} \frac{c d\xi}{g(\xi) y_1^2 \xi} + K\right), \qquad a < x < x_0. \tag{E.8}$$

La función y_1 puede escribirse en la forma

$$y_1(x) = (x-a)^n z(x), \tag{E.9}$$

con $n \geq 0$, z continua y $z(a) \neq 0$.
Tomamos x_0 tal que $\phi \neq 0$ y $z \neq 0$ en $(a, x_0]$, entonces es

$$y_2(x) = (x-a)^n z(x)\ \left(K + \int_{x_0}^{x} \frac{c d\xi}{(\xi-a)^{2n+1} z^2(\xi)\phi(\xi)}\right). \tag{E.10}$$

y aplicando el teorema del valor medio a la integral resulta

$$y_2(x) = (x-a)^n z(x)\ \left(K + A\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{(\xi-a)^{2n+1}}\right), \tag{E.11}$$

con

$$A = \frac{c}{[\phi(\overline{x}) z^2(\overline{x})]}, \qquad x \leq \overline{x} \leq x_0, \tag{E.12}$$

de donde se obtiene

$$y_2(x) = \begin{cases} (x-a)^n z(x)\{K + \frac{A}{2n}[(x_0-a)^{-2n} - (x-a)^{-2n}]\}, & n > 0 \\ \\ y_1(x)[K + A\ln(\frac{x-a}{x_0-a})], & n = 0 \end{cases}. \tag{E.13}$$

Finalmente, de esta última expresión se tiene que $\lim_{x\to a} y_2(x) = \pm\infty$.

Lema 2 *En las hipótesis del lema 1, si* $y_1(a) \neq 0$ *entonces* $y_2(x)$ *tiene una singularidad logarítmica en* $x = a$, *y si* $y_1(x)$ *tiene un cero de orden* $n > 0$ *entonces* y_2 *tiene un polo de orden* n *en* $x = a$.
Estos resultados se deducen de la ecuación (E.13) para $n = 0$ y $n > 0$ respectivamente.

E.2 Funciones cilíndricas

Funciones de Bessel

La ecuación de Bessel forma parte de la solución de algunos problemas de contorno para la ecuación

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{E.14}$$

en un círculo o en un cilindro. Por este motivo a las funciones de Bessel se las llama *funciones cilíndricas*.

Las *funciones de Bessel de primera clase y de orden* n, $J_n(x)$, son los coeficientes del desarrollo en serie de potencias de t, $(t \neq 0)$, de la función $\exp\left[\frac{x}{2}(t - 1/t)\right]$, a esta función se la llama *función generatriz* y su desarrollo es

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n. \tag{E.15}$$

Si en (E.15) se cambia t por $-t^{-1}$ se obtiene el mismo resultado, por lo tanto

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \tag{E.16}$$

Las funciones de Bessel se expresan mediante la serie

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \tag{E.17}$$

absolutamente convergente $\forall x$.

La función $J_n(x)$ es solución de la ecuación de Bessel

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0, \tag{E.18}$$

como se comprueba considerando la función

$$F(x,t) = \exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n, \tag{E.19}$$

que verifica

$$x^2 F_{xx} + x F_x + x^2 F = t^2 F_{tt} + t F_t, \tag{E.20}$$

es decir

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x)\right] t^n = 0. \tag{E.21}$$

Para $\nu \notin \mathbb{Z}$, la *función de Bessel de primera clase y de orden* ν es

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \tag{E.22}$$

y verifica

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0. \tag{E.23}$$

Si $\nu \notin \mathbb{Z}$, dos soluciones linealmente independientes de (E.23) son $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$.

Integrales de Bessel

De (E.15) con $t = e^{i\phi}$ resulta

$$e^{ix\sin\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(x)e^{in\phi}, \tag{E.24}$$

que es el desarrollo en serie de funciones de Bessel de la onda plana.
De (E.24) y (E.19) se obtiene

$$e^{ix\sin\phi} = J_0(x)+2iJ_1(x)\sin\phi+2J_2(x)\cos 2\phi+2iJ_3(x)\sin 3\phi+2J_4(x)\cos 4\phi+... \tag{E.25}$$

e igualando la parte real y la parte imaginaria, resultan

$$\begin{aligned} \cos(x\sin\phi) &= J_0(x) + 2J_2(x)\cos 2\phi + 2J_4(x)\cos 4\phi + ..., \\ \sin(x\sin\phi) &= 2J_1(x)\sin\phi + 2J_3(x)\sin 3\phi + ... \end{aligned} \tag{E.26}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(x\sin\phi)\cos n\phi\, d\phi &= \pi\,[1 + (-1)^n]J_n(x), \\ \int_0^{2\pi} \sin(x\sin\phi)\sin n\phi\, d\phi &= \pi\,[1 - (-1)^n]J_n(x). \end{aligned} \tag{E.27}$$

Sumando ambos resultados se obtiene para $J_n(x)$ la representación integral

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\phi - x\sin\phi)d\phi. \tag{E.28}$$

Bessel utilizó esta integral para determinar los coeficientes de Fourier necesarios para resolver la ecuación de Kepler para una órbita planetaria.
Tomando $n = 0$ y $t = \sin\phi$ en (E.28) obtenemos otra representación integral para J_0,

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos xt}{(1-t^2)^{1/2}}dt. \tag{E.29}$$

Funciones de Neumann

Una solución de la ecuación de Bessel con $\nu \notin \mathbb{Z}$ es la *función de Neumann* definida por

$$N_\nu(x) = [J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)]\ cosec(\pi\nu). \tag{E.30}$$

Entonces una solución general de (E.1) es

$$y = AJ_\nu(x) + BN_\nu(x). \tag{E.31}$$

Para $\nu = n \in \mathbb{Z}$, una solución general de (E.1) es

$$y = AJ_n(x) + BN_n(x), \tag{E.32}$$

con

$$N_n(x) = \lim_{\nu \to n} N_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\left\{\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} - (-1)^n \left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=n}\right\}. \tag{E.33}$$

Funciones de Hankel

Las *funciones de Hankel de primera y segunda especie* son soluciones complejas conjugadas de la ecuación de Bessel. Se las define mediante

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= J_\nu(x) + iN_\nu(x), \\ H_\nu^{(2)}(x) &= J_\nu(x) - iN_\nu(x). \end{aligned} \tag{E.34}$$

Para $\nu \notin \mathbb{Z}$, toman la forma

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= [J_\nu(x) \exp(-i\pi\nu) - J_{-\nu}(x)]i\, cosec(\pi\nu), \\ H_\nu^{(2)}(x) &= -[J_\nu(x) \exp(i\pi\nu) - J_{-\nu}(x)]i\, cosec(\pi\nu). \end{aligned} \tag{E.35}$$

Para $\nu = n \in \mathbb{Z}$, por paso al límite, se obtienen

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(x) &= J_n(x) + \frac{i}{\pi}\left\{\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} - (-1)^n \left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=n}\right\}, \\ H_n^{(2)}(x) &= J_n(x) - \frac{i}{\pi}\left\{\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} - (-1)^n \left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=n}\right\}. \end{aligned} \tag{E.36}$$

Entonces la solución general de la ecuación de Bessel puede expresarse por

$$y = AH_\nu^{(1)}(x) + BH_\nu^{(2)}(x), \tag{E.37}$$

con A y B constantes arbitrarias.

Funciones de Bessel de orden semi-entero

La serie (E.17) que define $J_n(x)$ puede escribirse

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} - ...\right]. \tag{E.38}$$

En particular,

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...\right) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\sin x, \qquad \text{(E.39)}$$

y

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\cos x. \qquad \text{(E.40)}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\frac{J_n(x)}{x^n}\right] &= -\frac{J_{n+1}(x)}{x^n}, \\ \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{J_n(x)}{x^n}\right)\right] &= \frac{J_{n+2}(x)}{x^{n+2}}, \end{aligned} \qquad \text{(E.41)}$$

y en general

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^k \left(\frac{J_n(x)}{x^n}\right) = \frac{(-1)^k J_{n+k}(x)}{x^{n+k}}, \qquad \text{(E.42)}$$

se obtiene

$$J_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(-1)^n x^{n+1/2}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{\sin x}{x}\right). \qquad \text{(E.43)}$$

Análogamente, de

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^k (x^n J_n(x)) = x^{n-k} J_{n-k}(x), \qquad \text{(E.44)}$$

resulta

$$J_{-n-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x^{n+1/2}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{\cos x}{x}\right). \qquad \text{(E.45)}$$

Observación: Se debe tener en cuenta que la notación $(\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^k$ es operacional, esto es, significa aplicar sucesivamente el operador diferencial $\frac{1}{x}\frac{d}{dx}$, k veces.

Fórmulas de recurrencia

Las soluciones de la ecuación de Bessel se hallan relacionadas mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \nu W_\nu(x) &= \frac{x}{2}\left(W_{\nu-1}(x) + W_{\nu+1}(x)\right), \\ W'_\nu(x) &= \frac{1}{2}\left(W_{\nu-1}(x) - W_{\nu+1}(x)\right), \\ W'_\nu(x) &= W_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x}W_\nu(x), \end{aligned}$$

$$W'_\nu(x) \quad = \quad \frac{\nu}{x}W_\nu(x) - W_{\nu+1}(x). \tag{E.46}$$

Integral de Fourier Bessel

Sea $f(r)$ una función continua en el intervalo $(0,\infty)$, con un número finito de máximos y mínimos en todo intervalo finito. Si existe

$$\int_o^\infty |f(r)| r\, dr \tag{E.47}$$

entonces existe la transformada de Fourier Bessel de $f(r)$,

$$F(\lambda) = \int_o^\infty f(\rho) J_n(\lambda\rho)\rho\, d\rho, \tag{E.48}$$

y su transformada inversa es

$$f(r) = \int_o^\infty F(\lambda) J_n(\lambda\rho)\lambda\, d\lambda. \tag{E.49}$$

Funciones de Bessel de argumento imaginario

Las funciones de Bessel de argumento imaginario, llamadas también *funciones de Bessel modificadas de primera clase*, se definen por

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix). \tag{E.50}$$

A partir de (E.17), se obtiene

$$I_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \tag{E.51}$$

y se observa que cuando x es real, $I_\nu(x)$ es real. $I_\nu(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + xy' - (x^2+\nu^2)y = 0. \tag{E.52}$$

Para $\nu \notin \mathbb{Z}$ una solución general es

$$y = AI_\nu(x) + BI_{-\nu}(x), \tag{E.53}$$

con A y B constantes arbitrarias.
Una segunda solución de (E.52) es

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\left[I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)\right]\ cosec(\pi\nu). \tag{E.54}$$

Si $\nu = n \in \mathbb{Z}$, se verifica que

$$I_{-n}(x) = I_n(x), \tag{E.55}$$

y en este caso una segunda solución de (E.52) se obtiene como límite para $\nu \to n$ de (E.54). Entonces, una solución general es

$$y = AI_n(x) + BK_n(x), \tag{E.56}$$

con

$$K_n(x) = \frac{(-1)^n}{2}\left[\left(\frac{\partial I_{-\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} - \left(\frac{\partial I_{\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=n}\right]. \tag{E.57}$$

Desarrollo en serie de funciones de Bessel

Teorema 1 *Toda función $f(r)$, derivable dos veces, acotada en $r = 0$, y nula para $r = r_0$, se puede desarrollar en la serie absoluta y uniformemente convergente*

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_m\left(\frac{\mu_n^{(m)} r}{r_0}\right), \tag{E.58}$$

con

$$A_m = \frac{1}{||J_m||^2}\int_0^{r_0} f(r) J_m\left(\frac{\mu_n^{(m)} r}{r_0}\right) r\, dr, \tag{E.59}$$

y

$$||J_m||^2 = \left[J_m'(\mu_n^{(m)})\right]^2 \frac{r_0^2}{2}, \tag{E.60}$$

siendo $\mu_n^{(m)}$ las infinitas raíces de la ecuación $J_n(\mu) = 0$.

E.3 Funciones esféricas

Las *funciones esféricas* surgen al resolver la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas.

E.3.1 Polinomios de Legendre

La función generatriz

$$\Psi(\rho, x) = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}}, \qquad 0 < \rho < 1, \qquad |x| < 1, \tag{E.61}$$

admite el desarrollo

$$\Psi(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\rho^n, \tag{E.62}$$

y los coeficientes $P_n(x)$ se denominan *polinomios de Legendre de grado* n.

Los coeficientes se calculan por medio del teorema de Cauchy:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\,\frac{\partial^n \Psi}{\partial \rho^n}\rfloor_{\rho=0} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Psi(\zeta, x)}{\zeta^{n+1}}d\zeta, \tag{E.63}$$

donde C es una curva cerrada que contiene al punto $\zeta = 0$ en el plano complejo $\zeta = \xi + i\eta$. Si $\sqrt{1+\zeta^2 - 2\zeta x} = 1 - \zeta z$, se obtienen

$$\zeta = \frac{2(z-x)}{(z^2-1)}, \quad d\zeta = \frac{2(1-\zeta z)dz}{(z^2-1)}, \quad \Psi(\zeta, x)\, d\zeta = \frac{2dz}{z^2-1},$$

entonces

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_{C_1} \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}dz, \tag{E.64}$$

donde C_1 es una curva cerrada que contiene a $z = x$. Por lo tanto,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n. \tag{E.65}$$

Esta es la fórmula de Rodrigo que permite concluir que $P_n(x)$ es un polinomio de grado n y que se verifica que $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.
Haciendo $x = 1$ y teniendo en cuenta la función generatriz se tiene

$$\Psi(\rho, 1) = \frac{1}{1-\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)\rho^n, \tag{E.66}$$

con lo cual $P_n(1) = 1$ y $P_n(-1) = (-1)^n$.
Si se consideran dos puntos M y M_0 con radios vectores r y r_0 que forman entre sí un ángulo θ, entonces es

$$R^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta, \tag{E.67}$$

y denotando $x = \cos\theta$

$$\frac{1}{R} = \begin{cases} \frac{1}{r_0}\,\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}}, & \rho = \frac{r}{r_0} < 1 \\ \frac{1}{r}\,\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}}, & \rho = \frac{r_0}{r} < 1, \end{cases} \tag{E.68}$$

y la solución fundamental de la ecuación de Laplace, $1/R$, puede desarrollarse en serie de polinomios de Legendre

$$\frac{1}{R} = \begin{cases} \frac{1}{r_0}\,\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta), & r < r_0 \\ \frac{1}{r}\,\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos\theta), & r_0 < r. \end{cases} \tag{E.69}$$

Fórmulas de recurrencia

Las fórmulas de recurrencia más utilizadas son

$$(n+1)P_{n+1}(x) \quad - \quad x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0,$$

$$nP_n(x) \quad - \quad xP_n'(x) + P_{n-1}'(x) = 0. \tag{E.70}$$

Ecuación de Legendre

La ecuación de Legendre tiene la forma

$$[(1-x^2)\,y']' + \lambda y = 0. \tag{E.71}$$

Para $\lambda = n(n+1)$ se tiene la ecuación

$$[(1-x^2)\,y']' + n(n+1)y = 0, \tag{E.72}$$

cuya solución acotada es el polinomio de Legendre $P_n(x)$.

Ortogonalidad de los polinomios de Legendre

Los polinomios de Legendre verifican

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{(2n+1)} & m = n \end{cases}. \tag{E.73}$$

Los polinomios de Legendre son las únicas soluciones no triviales acotadas de la ecuación de Legendre. La segunda solución linealmente independiente con P_n tiene en $x = \pm 1$ una singularidad logarítmica.

Ceros de los polinomios de Legendre

El polinomio de Legendre $P_n(x)$ tiene n ceros en el intervalo $(-1,1)$ y su derivada k-ésima, $k \leq n$, tiene $(n-k)$ ceros en $(-1,1)$
Utilizando la fórmula de Rodrigo (E.65) y analizando el comportamiento de las derivadas de $w(x) = (x^2-1)^n$ para $n > 1$ se tiene que $w(x)$ y $w'(x)$ se anulan en $x = \pm 1$, por tanto $w'(x)$ tiene al menos un cero en $(-1,1)$, $w''(x)$ se anula en ± 1 y tiene al menos dos ceros en $(-1,1)$. Siguiendo este razonamiento, $w^{(n)}(x)$ tiene al menos n ceros en $(-1,1)$, y dado que es un polinomio de grado n, tiene exactamente n ceros en dicho intervalo.
Del mismo modo la derivada primera de $P_n(x)$ tiene al menos $(n-1)$ ceros en $(-1,1)$ y es un polinomio de grado $(n-1)$, por lo que tiene exactamente $(n-1)$ ceros en $(-1,1)$. Entonces la derivada $k-$ésima de $P_n(x)$ tiene $(n-k)$ ceros en $(-1,1)$.

Representación integral de los polinomios de Legendre

A partir de la ecuación

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \int_{C_1} \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz, \tag{E.74}$$

y tomando el contorno C_1 como la circunferencia de radio $R = \sqrt{1-x^2}$, $|x| < 1$, y centro x, es decir $z = x + \sqrt{1-x^2}e^{i\phi}$, se tiene

$$\begin{aligned}
dz &= i\sqrt{1-x^2}\, e^{i\phi} d\phi, \qquad (z-x)^{n+1} = (1-x^2)^{\frac{n+1}{2}}\, e^{i(n+1)\phi}, \\
z^2 - 1 &= x^2 - 1 + (1-x^2)\, e^{2i\phi} + 2x\sqrt{1-x^2}\, e^{i\phi} = \\
&= \sqrt{1-x^2}\, e^{i\phi}[2x + \sqrt{1-x^2}(e^{i\phi} - e^{-i\phi})] = \\
&= 2\sqrt{1-x^2}\, e^{i\phi}[x + i\sqrt{1-x^2}\sin\phi].
\end{aligned}$$

Reemplazando en la expresión anterior resulta para los polinomios de Legendre la representación integral:

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[x + i\sqrt{1-x^2}\sin\phi\right]^n d\phi. \tag{E.75}$$

Acotación de los polinomios de Legendre

Los polinomios de Legendre están uniformemente acotados en $[-1,1]$, pues verifican que $|P_n(x)| \leq 1$.
Este resultado surge en forma inmediata de su representación integral.

E.3.2 Funciones adjuntas de Legendre

Las *funciones adjuntas de Legendre* son las soluciones acotadas de la ecuación

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right) y = 0, \qquad -1 < x < 1. \tag{E.76}$$

Para hallarlas se propone una función de la forma

$$y(x) = (1-x^2)^{m/2} v(x), \qquad v(\pm 1) \neq 0, \tag{E.77}$$

que reemplazada en la ecuación da

$$(1-x^2)v'' - 2x(m+1)v' + [\lambda - m(m+1)]v = 0. \tag{E.78}$$

Si se deriva la ecuación (E.71) m veces, se obtiene esta última ecuación, por lo que v es la derivada de orden m de la solución acotada de (E.71), es decir $\lambda = n(n+1)$ y

$$v = \frac{d^m P_n}{dx^m}. \tag{E.79}$$

Entonces, la función adjunta de Legendre de orden m, solución acotada de (E.76) con $\lambda = n(n+1)$, es

$$P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{m/2}\, \frac{d^m P_n}{dx^m}. \tag{E.80}$$

Las funciones adjuntas de Legendre verifican

$$P_n^{(0)}(x) = P_n(x), \qquad P_n^{(m)}(x) \neq 0, \quad m \leq n. \tag{E.81}$$

Norma de las funciones adjuntas

Las funciones adjuntas forman un sistema ortogonal cuya norma es

$$||P_n^{(m)}||^2 = \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)}. \tag{E.82}$$

E.3.3 Polinomios armónicos y funciones esféricas

Un polinomio armónico es un polinomio homogéneo que satisface la ecuación de Laplace.
En $\mathbb{R}^3$ son polinomios armónicos de grado 1 y 2 respectivamente,

$$\begin{aligned} u_1(x,y,z) &= ax + by + cz, \\ u_2(x,y,z) &= ax^2 + by^2 - (a+b)z^2 + cxy + dxz + eyz, \end{aligned}$$

con a, b, c, d, e arbitrarios.
Como se puede observar, hay tres polinomios linealmente independientes de grado 1 y cinco de grado 2.

Para el caso general se tiene el siguiente resultado:

Proposición *En* $\mathbb{R}^3$ *existen* $(2n+1)$ *polinomios armónicos linealmente independientes de grado* n*.*
Demostración: El número de coeficientes de un polinomio homogéneo u_n, de grado n es igual al número de combinaciones con repetición de 3 elementos tomados de a n, es decir

$$\binom{n+2}{n} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \tag{E.83}$$

El polinomio armónico de grado n, u_n, verifica $\Delta u_n = 0$, que a su vez es un polinomio homogéneo de grado $(n-2)$, y por lo tanto tiene $n(n-1)/2$ coeficientes nulos. Esto impone $n(n-1)/2$ condiciones sobre los coeficientes de u_n, y restan

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = 2n+1 \tag{E.84}$$

linealmente independientes.
Los polinomios armónicos se llaman *funciones esferoidales*.

Funciones esféricas

Se llaman *funciones esféricas* a las soluciones acotadas y con derivadas segundas continuas de la ecuación

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} + \lambda Y = 0. \tag{E.85}$$

Para su resolución se propone la separación de variables

$$Y(\theta, \phi) = Z(\theta)\, W(\phi),$$

y se obtiene la ecuación en W

$$W'' + \mu W = 0,$$

cuyas soluciones acotadas sobre una esfera son $\cos m\phi$ y $\sin m\phi$, con $m^2 = \mu$. Para Z se tiene la ecuación

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{dZ}{d\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{\mu}{\sin^2\theta}\right) Z = 0. \qquad \text{(E.86)}$$

Con el cambio de variable $x = \cos\theta$, y llamando $X(x) = X(\cos\theta) = Z(\theta)$, la ecuación se transforma en la ecuación adjunta de Legendre,

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dX}{dx}\right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right) X = 0 \quad |x| < 1, \qquad \text{(E.87)}$$

cuyas soluciones acotadas se obtienen para $\lambda = n(n+1)$, y son las funciones adjuntas de Legendre,

$$X(x) = P_n^{(m)}(x) = P_n^{(m)}(\cos\theta) = Z(\theta), \qquad m \leq n. \qquad \text{(E.88)}$$

Las funciones esféricas de orden n son

$$Y(\theta, \phi) = P_n^{(m)}(\cos\theta)[A_{nm}\cos m\phi + B_{nm}\sin m\phi]. \qquad \text{(E.89)}$$

Para designar a las funciones independientes en (E.89), se adopta la notación

$$\begin{aligned} Y_{n,m}(\theta,\phi) &= P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\phi, \\ Y_{n,-m}(\theta,\phi) &= P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\phi, \qquad m = 0, 1, 2..., n. \end{aligned} \qquad \text{(E.90)}$$

Por lo tanto existen $(2n+1)$ funciones esféricas distintas de orden n. La combinación lineal de ellas,

$$Y_n(\theta,\phi) = \sum_{m=-n}^{n} C_{n,m}\, Y_{n,m}(\theta,\phi), \qquad \text{(E.91)}$$

se denomina *armónico esférico* y es una función esférica.

Soluciones de la ecuación de Laplace

Se hallan aquí soluciones de la ecuación de Laplace en forma de funciones esferoidales. Para ello se resuelve la ecuación de Laplace sobre una esfera:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0. \qquad \text{(E.92)}$$

Proponiendo $u(r,\theta,\phi) = R(r)\,Y(\theta,\phi)$ se obtiene para Y la ecuación (E.85) y para R la ecuación de Euler,

$$r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0. \tag{E.93}$$

Si el problema a resolver exige soluciones acotadas, el parámetro de separación debe ser $\lambda = n(n+1)$.
Por lo tanto, las soluciones de la ecuación de Euler son r^n y $r^{-(n+1)}$, halladas proponiendo la solución r^α.
Las soluciones de la ecuación de Laplace resultan

$$r^nY_n(\theta,\phi), \qquad r^{-(n+1)}Y_n(\theta,\phi), \tag{E.94}$$

la primera se utiliza para la solución de problemas interiores y la segunda para problemas exteriores.
Estas soluciones son polinomios homogéneos en x, y, z, de grado n.
En efecto, la primera de las soluciones (E.94) es un polinomio homogéneo de grado n pues

$$r^nY_n(\theta,\phi) = r^n\sum_{m=0}^{n}P_n^{(m)}(\cos\theta)(A_{nm}\cos m\phi + B_{nm}\sin m\phi), \tag{E.95}$$

y, según (E.90), cada término de $r^nY_n(\theta,\phi)$ puede escribirse en la forma

$$v = r^n\sin^m\theta\cos m\phi\cos^{n-m-2k}\theta, \qquad 0 \le k \le [(n-m)/2], \tag{E.96}$$

donde $[\,]$ designa a la parte entera, siendo $v = v_1v_2v_3$, con

$$\begin{aligned} v_1 &= r^m\sin^m\theta\cos m\phi = Re\left(r\sin\theta e^{i\phi}\right)^m = Re(x+iy)^m,\\ v_2 &= r^{n-m-2k}\cos^{n-m-2k}\theta = z^{n-m-2k},\\ v_3 &= r^{2k} = (x^2+y^2+z^2)^k. \end{aligned} \tag{E.97}$$

Ortogonalidad de las funciones esféricas

El conjunto de funciones esféricas $Y_n(\theta,\phi)$, para distintos valores de n, es un conjunto ortogonal.
Para un valor fijo de n, el conjunto de las $(2n+1)$ funciones esféricas es un conjunto ortogonal.

Desarrollo en serie de funciones esféricas

Toda función $f(\theta,\phi)$ con derivadas segundas continuas, puede desarrollarse en serie de funciones esféricas absoluta y uniformemente convergente

$$f(\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty}Y_n(\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(A_{mn}\cos m\phi + B_{mn}\sin m\phi)P_n^{(m)}(\cos\theta), \tag{E.98}$$

cuyos coeficientes son

$$A_{mn} = \frac{1}{||Y_{mn}||^2} \int_0^{2\pi} f(\theta,\phi) P_n^{(m)}(\cos\theta) \cos m\phi \sin\theta \, d\theta d\phi,$$

$$B_{mn} = \frac{1}{||Y_{mn}||^2} \int_0^{2\pi} f(\theta,\phi) P_n^{(m)}(\cos\theta) \sin m\phi \sin\theta \, d\theta d\phi, \tag{E.99}$$

con

$$||Y_{nm}||^2 = \frac{2\pi}{(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \qquad m > 0,$$

$$||Y_{n0}||^2 = \frac{4\pi}{(2n+1)}. \tag{E.100}$$

E.4 Problemas propuestos

1- Demostrar que
a)

$$J_{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x,$$

b)

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

2- Expresar $J_{3/2}$, $J_{-3/2}$, $J_{5/2}$ y $J_{-5/2}$ en términos de las funciones trigonométricas.

3- a) Expresar $J_3(x)$ en función de $J_0(x)$ y $J_1(x)$.
b) Integrar

$$\int x^{-3} \, J_4(x) \; dx.$$

4- a) Probar que las funciones

$$u_\nu(r,\vartheta) = I_\nu(\mu r) \cos(\nu\vartheta),$$

$$v_\nu(r,\vartheta) = I_\nu(\mu r) \sin(\nu\vartheta),$$

con I_ν funciones de Bessel modificadas de primera clase, satisfacen la ecuación

$$\Delta u - \mu^2 u = 0.$$

b) Idem para

$$u_\nu(r,\vartheta) = K_\nu(\mu r) \cos(\nu\vartheta),$$

$$v_\nu(r,\vartheta) = K_\nu(\mu r)\sin(\nu\vartheta),$$

con K_ν funciones de Bessel modificadas.

5- a) Hallar la distribución estacionaria de concentración de un gas inestable dentro de un cilindro infinito de sección circular si se mantiene una concentración constante sobre la superficie del cilindro. Este problema corresponde a hallar la solución acotada de la ecuación bidimensional

$$\Delta u - k^2 u = 0,\ r < a,$$

con $u(a,\vartheta) = u_0$.
b) Resolver el problema anterior en $r > a$.

6- Demostrar que
a)

$$H^{(k)}_{\nu+1} + H^{(k)}_{\nu-1} = \frac{2\nu}{x} H^{(k)}_\nu, \qquad k = 1, 2,$$

b)

$$H^{(k)}_{\nu+1} - H^{(k)}_{\nu-1} = -2\left[H^{(k)}_\nu\right]', \qquad k = 1, 2.$$

Sugerencia: integrar por partes.

7- Demostrar que

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos tx}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

8- Demostrar que

$$\int_0^\infty \exp(-x\lambda) J_0(\rho\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + x^2}},\ x > 0.$$

9- Demostrar que

$$\int_0^\infty \exp(-z\lambda) J_1(\rho\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right),\ Re(z) > 0.$$

10- Demostrar que

$$\int_0^\infty \exp(-t\lambda^2) J_\nu(\rho\lambda)\lambda^{\nu+1}\,d\lambda = \frac{1}{2t}\left(\frac{\rho}{2t}\right)^\nu \exp\left(-\frac{\rho^2}{4t}\right).$$

11- Probar que

$$c(\rho, z) = \int_0^\infty J_0(\rho\lambda)\ \frac{\exp(-z\sqrt{\lambda^2 - k^2})}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\ \lambda\, d\lambda = \frac{\exp\left(ik\sqrt{\rho^2 + z^2}\right)}{\sqrt{\rho^2 + z^2}},\ z > 0$$

con $z \in \mathbb{R}$, es solución de

$$\Delta v + k^2 v = 0.$$

12- Demostrar que

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left[\lambda\left(z + ix\sin t + iy\cos t\right)\right] \exp(imt)\ dt$$

es armónica.

13- Hallar la distribución estacionaria de temperatura en un cilindro homogéneo $0 \leq r \leq r_0$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 2l$. La base del cilindro tiene temperatura T y el resto de la superficie temperatura nula.

14- Demostrar:

a)

$$nP_n(x) - xP_n'(x) + P_{n-1}'(x) = 0,$$

b)

$$P_n'(x) - xP_{n-1}'(x) - nP_{n-1}(x) = 0.$$

15- Demostrar que los polinomios de Legendre satisfacen la ecuación

$$\left[(1 - x^2)P_n'\right]' + n(n+1)P_n = 0.$$

16- a) Demostrar la ortogonalidad de los polinomios de Legendre.

b) Verificar que

$$\| P_n \|^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

17- Verificar que

$$q(x) = \frac{x}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - 1,$$

satisface la ecuación de Legendre para $n = 1$.

18- a) Probar que

$$u(x, y, z) = \int_{-\pi}^{\pi} f(z + ix\sin t + iy\cos t, t)\, dt,$$

con $f(\tau, t)$ analítica respecto de τ y t, es armónica.

b) Probar que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(z + ix\sin t + iy\cos t)^m\,dt = r^m P_m(\cos\vartheta),$$

con $x = r\cos\varphi\sin\vartheta$, $y = r\sin\varphi\sin\vartheta$, $z = r\cos\vartheta$.

19- Resolver $\Delta u = 0$ con $u(r,\vartheta)$ acotada y $u(r_0,\vartheta) = f(\vartheta)$ para
a) $r < r_0$,
b) $r > r_0$.

20- Demostrar que existen $(2n+1)$ polinomios armónicos de grado n linealmente independientes.

21- Hallar todos los polinomios armónicos de tercer grado.

22- a) Demostrar que las funciones $r^n Y_n^{(k)}(\vartheta,\varphi)$ son polinomios armónicos de grado n.
b) Hallar $Y_3^{(0)}(\vartheta,\varphi)$, $Y_3^{(1)}(\vartheta,\varphi)$.
c) Expresar $r^3 Y_3^{(0)}(\vartheta,\varphi)$, $r^3 Y_3^{(1)}(\vartheta,\varphi)$ en función de los polinomios del problema **21**.

23- Demostrar la ortogonalidad del sistema de funciones propias

$$\left\{ J_m\left(\frac{\mu_n^{(m)} r}{r_0}\right)\right\}$$

y obtener su norma.

24- Resolver el problema de las oscilaciones propias de una membrana circular de radio r_0 utilizando separación de variables:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + \lambda^2 v &= 0, \qquad 0 < r < r_0,\;\; v \neq 0,\\ v(r_0,\phi) &= 0, \qquad |v(0,\vartheta)| < \infty,\end{aligned}$$

Apéndice F

Ecuaciones integrales

F.1 Ecuaciones integrales de primera y segunda especie

Una ecuación integral es aquella que contiene a la función incógnita bajo el signo integral.
En particular, la siguiente ecuación, respecto de la función $\phi(x)$, es una ecuación integral

$$h(x)\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x,\xi)\phi(\xi)d\xi = f(x), \tag{F.1}$$

donde $h(x)$, $K(x,\xi)$, y $f(x)$ son funciones conocidas, y λ es un parámetro (o autovalor); las variables ξ y x toman valores en los intervalos (a,b) y (c,d) respectivamente, pero ambos pueden reducirse al intervalo $(0,1)$ por transformaciones simples.
Se estudiarán sólo las *ecuaciones integrales lineales*, es decir, aquellas donde la función incógnita aparece una vez en cada sumando. Si $h(x)$ no se anula, dividiendo ambos miembros de (F.1) por $h(x)$, se obtiene una ecuación de la forma

$$\phi(x) - \lambda \int_0^1 K(x,\xi)\phi(\xi)d\xi = f(x). \tag{F.2}$$

La ecuación (F.2) se denomina *ecuación integral de segunda especie o de Fredholm*.
Si $f(x) = 0$, la ecuación se dice homogénea. Si en la ecuación (F.1) es $h(x) = 0$, se tiene

$$\int_0^1 K(x,\xi)\phi(\xi)d\xi = f(x), \tag{F.3}$$

y se denomina *ecuación integral de primera especie*.

La función $K(x,\xi)$ es el *núcleo* de la ecuación integral. El núcleo es *simétrico* si $K(x,\xi)=K(\xi,x)$.
La ecuación

$$\phi(x)-\lambda\int_0^x K(x,\xi)\phi(\xi)d\xi=f(x),\qquad x>0, \tag{F.4}$$

caso particular de (F.2) donde $K(x,\xi)=0$ para $x<\xi$, es la *ecuación integral de Volterra de segunda especie* y la ecuación

$$\int_0^x K(x,\xi)\phi(\xi)d\xi=f(x),\qquad x>0, \tag{F.5}$$

es la *ecuación de Volterra de primera especie*.

Las ecuaciones integrales se relacionan con las ecuaciones diferenciales ordinarias, tal como lo muestra el siguiente resultado.

Proposición 1 *El problema de valor inicial*

$$\begin{aligned}\phi''(x)+p(x)\phi(x) &= q(x),\\ \phi(0) &= \phi(1)=0,\end{aligned} \tag{F.6}$$

es equivalente a la ecuación de Fredholm de segunda especie

$$\phi(x)-\int_0^1 K(x,\xi)p(\xi)\phi(\xi)\,d\xi=f(x), \tag{F.7}$$

con

$$K(x,\xi)=\begin{cases}\xi(1-x), & \xi\le x\\ x(1-\xi), & x\le\xi,\end{cases} \tag{F.8}$$

y

$$f(x)=-\int_0^1 K(x,\xi)q(\xi)d\xi. \tag{F.9}$$

Demostración: Según (F.8) es $K(0,\xi)=K(1,\xi)=0$, entonces $f(0)=f(1)=0$ y por (F.7) $\phi(0)=\phi(1)=0$.
De (F.7) se tiene

$$\begin{aligned}\phi(x) &= -\int_0^x K(x,\xi)q(\xi)d\xi-\int_x^1 K(x,\xi)q(\xi)d\xi+\\ &+ \int_0^x K(x,\xi)p(\xi)\phi(\xi)d\xi+\int_x^1 K(x,\xi)p(\xi)\phi(\xi)d\xi\\ &= -(1-x)\int_0^x \xi q(\xi)d\xi-x\int_x^1(1-\xi)q(\xi)d\xi+\\ &+ (1-x)\int_0^x \xi p(\xi)\phi(\xi)d\xi+x\int_x^1(1-\xi)p(\xi)\phi(\xi)d\xi,\end{aligned} \tag{F.10}$$

derivando resulta

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \int_0^x \xi q(\xi)d\xi - \int_x^1 (1-\xi)q(\xi)d\xi - \int_0^x \xi p(\xi)\phi(\xi)d\xi + \\ &+ \int_x^1 (1-\xi)p(\xi)\phi(\xi)d\xi, \qquad \text{(F.11)}\end{aligned}$$

y finalmente se obtiene

$$\phi''(x) = q(x) - p(x)\phi(x). \qquad \text{(F.12)}$$

La recíproca se demuestra fácilmente integrando y haciendo el camino inverso.

En forma análoga se demuestra el siguiente resultado que relaciona una EDO con una ecuación de Volterra.

Proposición 2 *El problema de valor inicial*

$$\begin{aligned}&\phi''(x) + p(x)\phi(x) = q(x), \\ &\phi(0) = \alpha, \quad \phi'(0) = \beta, \qquad \text{(F.13)}\end{aligned}$$

es equivalente a la ecuación de Volterra de segunda clase

$$\phi(x) = \int_0^x (x-\xi)q(\xi)d\xi - \int_0^x (x-\xi)p(\xi)\phi(\xi)d\xi + \alpha + \beta x. \qquad \text{(F.14)}$$

Ecuaciones integrales de segunda especie de núcleo disociado

Estas ecuaciones tienen especial interés como puente de enlace con los sistemas de ecuaciones algebráicas y por servir de aproximación al caso general. Se analiza el núcleo de la ecuación completa

$$\phi(x) - \lambda \int_0^1 K(x,\xi)\phi(\xi)d\xi = f(x). \qquad \text{(F.15)}$$

a) Si el núcleo tiene separadas o disociadas sus variables, es decir,

$$K(x,\xi) = \alpha(x)\beta(\xi), \qquad \text{(F.16)}$$

la ecuación integral se reduce a

$$\phi(x) - \lambda\Phi\alpha(x) = f(x), \qquad \text{(F.17)}$$

llamando $\int_0^1 \beta(\xi)\phi(\xi)d\xi = \Phi$.
Multiplicando (F.17) por $\beta(x)$ e integrando en $(0,1)$, la ecuación integral se transforma en

$$\Phi - \lambda k\Phi = f_1, \qquad \text{(F.18)}$$

con $k = \int_0^1 \alpha(x)\beta(x)dx$, y $f_1 = \int_0^1 f(x)\beta(x)dx$. Despejando el valor de Φ, si es $\lambda k \neq 1$, la ecuación (F.17) determina $\phi(x)$ como la única solución posible, como se ve sustituyendo en (F.17) el valor de (F.18), obteniéndose una $\phi(x)$ que verifica la ecuación (F.2) para el núcleo (F.16).

Supongamos ahora que la ecuación integral es homogénea, es decir, $f(x) = 0$, entonces, la ecuación (F.18) es $\Phi(1 - \lambda k) = 0$, por lo tanto la condición necesaria y suficiente para que haya solución no nula es $\lambda = 1/k$ (autovalor). Si α y β son ortogonales en $(0, 1)$ (es decir $k = 0$), resulta $\Phi = 0$, y no existen autovalores.

b) El tipo más general de *núcleo disociado o degenerado* es de la forma

$$K(x, \xi) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)\beta_j(\xi). \tag{F.19}$$

La ecuación integral (F.2) se puede escribir

$$\phi(x) - \lambda \sum_{j=1}^{n} \Phi_j \alpha_j(x) = f(x), \tag{F.20}$$

con $\Phi_j = \int_0^1 \beta_j(\xi)\phi(\xi)d\xi$. Multiplicando la ecuación (F.20) por $\beta_i(x)$, $i = 1, 2, ...n$, e integrando en $(0, 1)$ resulta

$$\Phi_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} k_{ij}\Phi_j = f_i, \tag{F.21}$$

donde $k_{ij} = \int_0^1 \alpha_j(x)\beta_i(x)\,dx$, y $f_i = \int_0^1 f(x)\beta_i(x)\,dx$.
Se tiene pues para $i = 1, 2, ...n$, un sistema de ecuaciones lineales en las n incógnitas $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n$, cuyo determinante es $\det(I - \lambda K)$, con I matriz unidad y $K = (k_{ij})$. Si $\det(I - \lambda K) \neq 0$, el sistema (F.21) tiene solución única y los valores de λ correspondientes se llaman *valores regulares*.
El sistema (F.21) homogéneo, $f(x) = 0$, tiene solución sólamente si λ es *autovalor*, es decir, si anula al determinante del sistema.

Ejemplo 1. Resolvamos la ecuación integral

$$\phi(x) = 1 - 3x + \lambda \int_0^1 (1 - 3x\xi)\phi(\xi)\,d\xi,$$

para valores regulares de λ.
El núcleo es $K(x, \xi) = 1 - 3x\xi$, de modo que tomaremos $\alpha_1(x) = 1$, $\alpha_2(x) = x$, $\beta_1(\xi) = 1$, $\beta_2(\xi) = -3\xi$.
Si $\Phi_1 = \int_0^1 \phi(\xi)\,d\xi$ y $\Phi_2 = \int_0^1 (-3\xi)\phi(\xi)\,d\xi$, la ecuación integral dada se escribe

$$\phi(x) - \lambda(\Phi_1 + \Phi_2 x) = 1 - 3x.$$

Multiplicando la anterior por $\beta_i,\ i=1,2$, e integrando entre 0 y 1 se obtiene el sistema

$$\Phi_1-\lambda\left(\Phi_1\int_0^1 dx+\Phi_2 x\int_0^1 xdx\right)=\int_0^1(1-3x)dx$$
$$\Phi_2-\lambda\left(\Phi_1\int_0^1(-3x)dx+\Phi_2\int_0^1(-3x^2)dx\right)=\int_0^1(x-3x^2)dx,$$

es decir,

$$\begin{cases}(1-\lambda)\,\Phi_1-\frac{\lambda}{2}\,\Phi_2=-\frac{1}{2}\\ \\ \frac{3}{2}\lambda\,\Phi_1+(1+\lambda)\,\Phi_2=\frac{3}{2}.\end{cases}$$

El sistema tiene determinante

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -\frac{\lambda}{2}\\ \frac{3\lambda}{2} & 1+\lambda\end{vmatrix}=1-\frac{\lambda^2}{4},$$

de modo que los valores regulares de λ son $\mathbb{R}-\{2,-2\}$. La solución del sistema es

$$\Phi_1=-\frac{1}{(\lambda+2)},\qquad \Phi_2=\frac{3}{(\lambda+2)}.$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación integral dada, para cada λ que no sea autovalor, está dada por la ecuación (F.20),

$$\begin{aligned}\phi(x)&=1-3x+\lambda\left[\left(-\frac{1}{(\lambda+2)}\right)+\left(\frac{3}{(\lambda+2)}\right)x\right],\\ \phi(x)&=1-3x+(1-3x)\left[-\frac{\lambda}{(\lambda+2)}\right],\end{aligned}$$

es decir,

$$\phi(x)=(1-3x)\,\frac{2}{(\lambda+2)}.$$

Las soluciones de la ecuación homogénea son, para $\lambda=2,\ \phi(x)=c(1-x)$ y para $\lambda=-2,\ \phi(x)=c(1-3x)$.

Ejemplo 2. Consideremos la ecuación

$$\phi(x)-\lambda\int_0^1(2x\xi-\xi^2)\phi(\xi)d\xi=\frac{1}{x}.$$

Poniendo $\alpha_1(x)=2x$, $\alpha_2(x)=1$, $\beta_1(\xi)=\xi$, $\beta_2(\xi)$, el sistema (F.21) es

$$\begin{cases}(6-4\lambda)\,\Phi_1-3\lambda\,\Phi_2=6\\ \\ 3\lambda\,\Phi_1+(6+2\lambda)\,\Phi_2=-3,\end{cases}$$

con

$$\Phi_1 = \frac{3(\lambda+12)}{(\lambda-6)^2}, \qquad \Phi_2 = \frac{-6(\lambda+3)}{(\lambda-6)^2},$$

y la solución de la ecuación integral dada, para cada λ que sea regular es

$$\phi(x) = \frac{1}{x} + 2x\lambda\Phi_1 + \lambda\Phi_2.$$

El único autovalor es la raíz doble $\lambda = 6$. El sistema homogéneo se reduce a $\Phi_1 + \Phi_2 = 0$, y la solución de la ecuación homogénea es $\phi(x) = c(2x-1)$.

Ejemplo 3. Sea la ecuación integral homogénea

$$\phi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x+\xi)\phi(\xi)d\xi.$$

El núcleo es $K(x,\xi) = \sin(x+\xi) = \sin x \cos\xi + \cos x \sin\xi$.
El sistema (F.21) se escribe

$$\begin{cases} \Phi_1 - \lambda\pi\Phi_2 = 0 \\ -\lambda\pi\Phi_1 + \Phi_2 = 0. \end{cases}$$

Las correspondientes soluciones son $\Phi_1 = \pm\Phi_2$. El determinante es

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda\pi \\ \lambda\pi & 1 \end{vmatrix}$$

y los autovalores son $\lambda = \pm 1/\pi$.
Las soluciones de la ecuación integral son

$$\phi(x) = \sin x, \qquad \phi(x) = \cos x,$$

a menos de un factor constante.

Teoremas de Fredholm

Consideremos la ecuación integral lineal de segunda especie

$$\phi(x) - \lambda \int_0^1 K(x,\xi)\phi(\xi)d\xi = f(x), \tag{F.22}$$

donde $K(x,\xi)$ y $f(x)$ son funciones conocidas.

Teorema 1 (teorema de la alternativa) *O bien la ecuación integral de segunda especie (F.22) tiene solución única para cualquier $f(x)$, o la ecuación*

homogénea correspondiente tiene por lo menos una solución no trivial, o sea, no idénticamente nula.

Teorema 2 *Si la ecuación (F.22) tiene solución única, entonces también tiene solución única la ecuación traspuesta, es decir de núcleo $K(\xi, x)$,*

$$\phi(x) - \lambda \int_0^1 K(\xi, x)\phi(\xi)d\xi = f(x). \tag{F.23}$$

La ecuación integral homogénea dada y su traspuesta tienen el mismo número finito de soluciones linealmente independientes.

Teorema 3 *Si la ecuación homogénea tiene por lo menos una solución distinta de la trivial, la condición necesaria y suficiente para la existencia de la solución de la ecuación no homogénea (F.22) es*

$$\int_0^1 f(x)z(x)dx = 0, \tag{F.24}$$

donde $z(x) \neq 0$ es cualquier solución de la ecuación homogénea traspuesta de (F.22).

Si se cumple la condición (F.24), la ecuación (F.22) posee un conjunto infinito de soluciones, ya que esta ecuación será también satisfecha por cualquier función del tipo

$$\phi(x) = g(x) + a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + ... + a_k\phi_k(x), \tag{F.25}$$

con $g(x)$ alguna solución de (F.22) y $\phi_k(x)$ las soluciones de la ecuación homogénea correspondiente.

Una solución general de la ecuación $\phi(x) = 1 - 3x + \lambda \int_0^1 (1 - 3x\xi)\phi(\xi)d\xi$ es (ver ejemplo 1), para $\lambda = 2,\ \phi(x) = (1 - 3x)/2 + c(1 - x)$.

Los tres teoremas enunciados se conocen como *teoremas de Fredholm*. Sus demostraciones, como en general la mayoría de las demostraciones de e-xistencia de soluciones de ecuaciones, proveen métodos para la resolución aproximada de las ecuaciones integrales (F.22).

En las aplicaciones desempeña un papel importante el primer teorema de Fredholm sobre la alternativa, ya que en lugar de demostrar que la ecuación integral dada (F.22) tiene solución, frecuentemente resulta conveniente demostrar que la ecuación homogénea correspondiente (o su traspuesta), tiene sólamente solución trivial.

Resolución por iteración

Dada la ecuación integral

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, \xi)\phi(\xi)d\xi, \tag{F.26}$$

y sustituyendo en ella $\phi(\xi)$ por

$$\phi(\xi) = f(\xi) + \lambda \int_0^1 K(\xi, \eta)\phi(\eta)d\eta, \tag{F.27}$$

resulta

$$\phi(x) = f(x)+\lambda \int_0^1 K(x,\xi)f(\xi)d\xi+\lambda^2 \int_0^1 K(x,\xi) \int_0^1 K(\xi,\eta)\phi(\eta)d\eta\}d\xi. \tag{F.28}$$

Introduciendo el *núcleo iterado*, definido por

$$K^{(2)}(x,\eta) = \int_0^1 K(x,\xi)K(\xi,\eta)d\xi, \tag{F.29}$$

la ecuación (F.28) se escribe

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x,\xi)f(\xi)d\xi + \lambda^2 \int_0^1 K^{(2)}(x,\eta)\phi(\eta)d\eta. \tag{F.30}$$

Si designamos $\mathcal{K}^1$ al operador

$$\mathcal{K}^1\phi(\xi)(x) = \int_0^1 K(x,\xi)\phi(\xi)d\xi, \tag{F.31}$$

con $\mathcal{K}^2$ al operador

$$\mathcal{K}^1\{\mathcal{K}^1\phi(\xi)\}(x) = \int_0^1 K(x,\xi) \int_0^1 K(\xi,\eta)\phi(\eta)d\eta d\xi, = \int_0^1 K^{(2)}(x,\xi)\phi(\xi)d\xi, \tag{F.32}$$

y en general,

$$\mathcal{K}^n\phi(\xi)(x) = \int_0^1 K^{(n)}(x,\xi)\phi(\xi)d\xi, \tag{F.33}$$

la ecuación (F.30) resulta

$$\phi(x) = \{f\}(x) + \lambda\mathcal{K}^1\{f\}(x) + \lambda^2\mathcal{K}^2\{\phi\}(x). \tag{F.34}$$

Reiterando este procedimiento resulta la n-ésima iteración

$$\phi = \{f\} + \lambda\mathcal{K}^1\{f\} + \lambda^2\mathcal{K}^2\{f\} + ...\lambda^n\mathcal{K}^n\{f\} + \lambda^{n+1}\mathcal{K}^{n+1}\{f\}\phi; \tag{F.35}$$

No se sabe si $\phi(x)$ existe, no obstante, a modo de conjetura, se escribe la serie

$$\phi = f + \lambda\mathcal{K}^1 f + ... + \lambda^n\mathcal{K}^n f + ... \tag{F.36}$$

y se ve si converge, y en tal caso, si satisface (F.26).
Suponiendo que se cumplen las acotaciones

$$|K(x,\xi)| < M, \quad |f(x)| < N, \quad 0 < x, \xi < 1, \tag{F.37}$$

al multiplicar f por $K(x,\xi)$ e integrar resulta $|\mathcal{K}^1\{f\}| < MN$, $|\mathcal{K}^2\{f\}| < NM^2$, ..., $|\mathcal{K}^n\{f\}| < NM^n$, ..., luego, la serie converge uniforme y absolutamente para $\lambda < 1/M$ y la función $\phi(x)$ así definida satisface la ecuación $\phi - \lambda\mathcal{K}^1\phi = f$, pues siendo legítima la integración término a término es, $\mathcal{K}^1\{\phi\} = \mathcal{K}^1\{f\} + \lambda\mathcal{K}^2\{f\} + ... +$, y multiplicando por λ y restando de (F.36) resulta $f(x)$; así pues, para λ suficientemente pequeño ($\lambda < 1/M$), la ecuación (F.36) representa la solución buscada para la ecuación integral dada (F.26).

Esto puede expresarse de otro modo, llamando *núcleo resolvente* a la función de x, ξ y λ definida por la serie (también llamada de Neumann)

$$K(x,\xi,\lambda) = K(x,\xi) + \lambda K^2(x,\xi) + \lambda^2 K^3(x,\xi) + ..., \qquad \text{(F.38)}$$

pues la solución se expresa

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x,\xi,\lambda) f(\xi) d\xi. \qquad \text{(F.39)}$$

El propio método iterativo muestra la unicidad de la solución, en efecto, si existiera otra solución ψ, dicho procedimiento conduciría a la ecuación (F.36), y por lo tanto, $\phi = \psi$.

Obsérvese la gran generalidad del método, que sólo ha exigido del núcleo integrabilidad y acotación, mientras que la demostración del teorema de la alternativa de Fredholm se basa en la continuidad del núcleo.

Ejemplo 4. Resolveremos la ecuación integral

$$\phi(x) = x + \frac{1}{5}\int_0^1 x\xi\phi(\xi)\, d\xi,$$

por el método de aproximaciones sucesivas. Será, en virtud de (F.36)

$$\begin{aligned}
f(x) &= x, \\
\lambda\mathcal{K}^1\{f\} &= \frac{x}{5}\int_0^1 \xi^2\, d\xi = \frac{x}{15}, \\
\lambda^2\mathcal{K}^2\{f\} &= \lambda\mathcal{K}^1\{\lambda\mathcal{K}^1\{f\}\} = \frac{1}{15}\left(\frac{x}{5}\int_0^1 \xi^2\, d\xi\right) = \frac{x}{15^2}, ..., \\
\phi(x) &= (1 + \frac{1}{15} + \frac{1}{15^2} + ... + \frac{1}{15^n} + ...)/, x,
\end{aligned}$$

de modo que

$$\phi(x) = \frac{15}{14}\, x,$$

es la solución buscada.

Ecuaciones de Volterra

Para resolver la ecuación integral de Volterra

$$\phi(x) - \lambda \int_0^x K(x,\xi)\phi(\xi)d\xi = f(x), \tag{F.40}$$

también se utiliza el método iterativo o de aproximaciones sucesivas. Aún más, veremos cómo se amplía la región de convergencia de la serie (F.36), gracias a la más estrecha acotación que ahora se logra. En efecto, al permutar la integral reiterada en (F.28), resulta

$$\int_0^x K(x,\xi)\left(\int_0^\xi K(\xi,\eta)\phi(\eta)d\eta\right)d\xi = \int_0^x \phi(\eta)\int_\eta^x K(x,\xi)K(\xi,\eta)\,d\xi d\eta, \tag{F.41}$$

si $|K(x,\xi)| < M$, el núcleo iterado

$$K^{(2)}(x,\eta) = \int_\eta^x K(x,\xi)K(\xi,\eta)\,d\xi, \tag{F.42}$$

está acotado por

$$|K^{(2)}(x,\eta)| < M^2\int_\eta^x d\eta = \frac{(x-\eta)}{1!}M^2. \tag{F.43}$$

En general se tiene

$$K^{(n)}(x,\eta) = \int_\eta^x K(x,\xi)K^{(n-1)}(\xi,\eta)\,d\xi, \tag{F.44}$$

y

$$|K^{(n)}(x,\eta)| < \frac{(x-\eta)^{n-1}}{(n-1)!}\,M^n. \tag{F.45}$$

Por lo que si $|f(x)| < N$, el operador $\mathcal{K}^n$ verifica

$$|\mathcal{K}^n\{f\}| < N\frac{M^n x^n}{n!}. \tag{F.46}$$

La serie mayorante, en este caso, no es geométrica, sino exponencial, y converge $\forall\ \lambda$, luego resulta que la serie de Neumann (F.38) de una ecuación de Volterra de segunda especie converge absoluta y uniformemente a su única solución $\forall\ \lambda$.
En particular, por ser única la solución dada por la serie de Neumann, si la ecuación (F.40) es homogénea ($f(x) = 0$), su solución es la función idénticamente nula, luego, el problema homogéneo es imposible $\forall\ \lambda$.

Bibliografía

[1] Abramowitz, M., Stegun, I., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Inc., New York, 1972

[2] Apóstol, T., *Calculus*, Volumen II, Segunda Edición, Ed. Reverté, Barcelona, 2001

[3] Barton, G., *Elements of Green's Functions and Propagation - Potentials, Diffusion and Waves*, Clarendon Press, Oxford, 1991

[4] Birkoff, G., Maclane, S., *A Survey of Modern Algebra*, Macmillan, New York, 1951

[5] Bitsadze, A., *Equations of Mathematical Physics*, MIR, Moscú, 1980

[6] Bitsadze, A.V., Kalinichenko, D., *A collection of problems on the equations of mathematical physics*, MIR, Moscú, 1980

[7] Brown, J.W., Churchil, R.V., *Fourier Series and Boundary Value Problems*, MacGraw-Hills Inc., New York, 1993

[8] Courant, R., *Differential and Integral Calculus Methods*, Vol I, II, Nordeman Publishing Company, New York, 1942

[9] Courant, R., Hilbert, D., *Methods of Mathematical Physics*, Vol I, II, Wiley Classics Edition, 1989

[10] Dym, H., McKean, H.P., *Fourier Series and Integrals*, Academic Press, 1972

[11] Duff, G., Naylor, D., *Differential Equations of Applied Mathematics*, John Wiley & Sons, New York, 1966

[12] Elsgoltz, L., *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*, MIR, Moscú, 1969

[13] Erdelyi, A., *Higher Transcendental Functions*, MacGraw-Hill Inc., New York, 1955

[14] Folland, G., *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press, 1976

[15] Gelfand, I.M., Shilov, G.E., *Generalized Functions*, Vol. I-III, Academic Press, New York & London, 1977

[16] Godunov, S.K., *Ecuaciones de la Física Matemática*, MIR, 1978

[17] Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M., *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, San Diego, 2000

[18] Guzmán, M., *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Editorial Alhambra, 1975

[19] Haberman, R., *Elementary Applied Partial Differential Equations*, Prencite-Hall, 1983

[20] Hadamard, J., *La theorie des equations aux derivées partielles*, Editions Scientifiques, 1964

[21] Hellwig, G., *Partial Differential Equations*, Blaisdell Pub. Co., New York, 1964

[22] John, F., *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1982

[23] Kellogg, O.D., *Foundations of Potential Theory*, Springer-Verlag, 1929

[24] Krasnov, M., Kisielov, A., Makarenko, G., *Ecuaciones integrales*, MIR, Moscú, 1982

[25] Larry. C.A., *Elementary Partial Differential Equations with Boundary Value Problems*, Academic Press College Division, 1986

[26] Maki, D.P, Maynard T., *Mathematical Models and Applications*, Prentice Hall, New York, 1973

[27] Mijailov, V.P., *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*, MIR, Moscú, 1980

[28] Miller, F.M., *Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1952

[29] Mizohata, S., *Theory of Partial Differential Equations*, Cambridge Universily Press, 1973

[30] Petrovsky, I.G., *Lectures on Partial Differential Equations*, Interscience Publications, New York, 1954

[31] Petrovsky, I.G., *Lectures on Integral Equations*, MIR, Moscú, 1976

[32] Piskunov, *Cálculo diferencial e integral*, Tomo II, MIR, Moscú, 1969

[33] Protter, M.H. Weinberger, H.F., *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer-Verlag, 1984

[34] Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., Trejo, C.A., *Análisis Matemático*, Vol. II, Kapeluz, 1959

[35] Smirnov, M., *A course of Higher Mathematics*, vol. IV, Pergamon Press, 1964

[36] Smirnov, M., *Problemas de ecuaciones de la física matemática*, MIR, Moscú, 1976

[37] Sneddon. I.N., *Elements of Partial Differential Equations*, MacGraw-Hills Inc., 1957

[38] Sneddon. I.N., *Fourier Transforms*, MacGraw-Hills Inc., 1951

[39] Sobolev, S.L., *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Dover,1989

[40] Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press, 1949

[41] Spiegel, M.R., *Applied Differential Equations*, Prentice Hall,1958

[42] Tijonov, A., Samarsky, A., *Ecuaciones de la Física Matemática*, MIR, Moscú, 1972

[43] Treves, F., *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press, 1975

[44] Watson, G.N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, 1966

[45] Weinberger. H., *Partial Differential Equations*, Blasdel International Texbook Series, 1957

[46] Zanderer, *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1983

Autora

Claudia Marcela Giordano

Profesora de la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la Universidad Nacional de La Plata e Investigadora del Consejo Nacional de Investigacines Científicas y Técnicas con lugar de trabajo en el Instituto de Astrofísica de La Plata.

Libros de Cátedra

Giordano, Claudia Marcela
Ecuaciones diferenciales parciales / Claudia Marcela Giordano. - 1a ed . - La Plata : Universidad Nacional de La Plata, 2016.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-950-34-1378-4

1. Matemática. 2. Ecuaciones Diferenciales. I. Título.
CDD 512

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP

Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata
47 N.º 380 / La Plata B1900AJP / Buenos Aires, Argentina
+54 221 427 3992 / 427 4898
edulp.editorial@gmail.com
www.editorial.unlp.edu.ar

Edulp integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2017
ISBN 978-950-34-1378-4

e exactas

Editorial de la Universidad de La Plata

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA